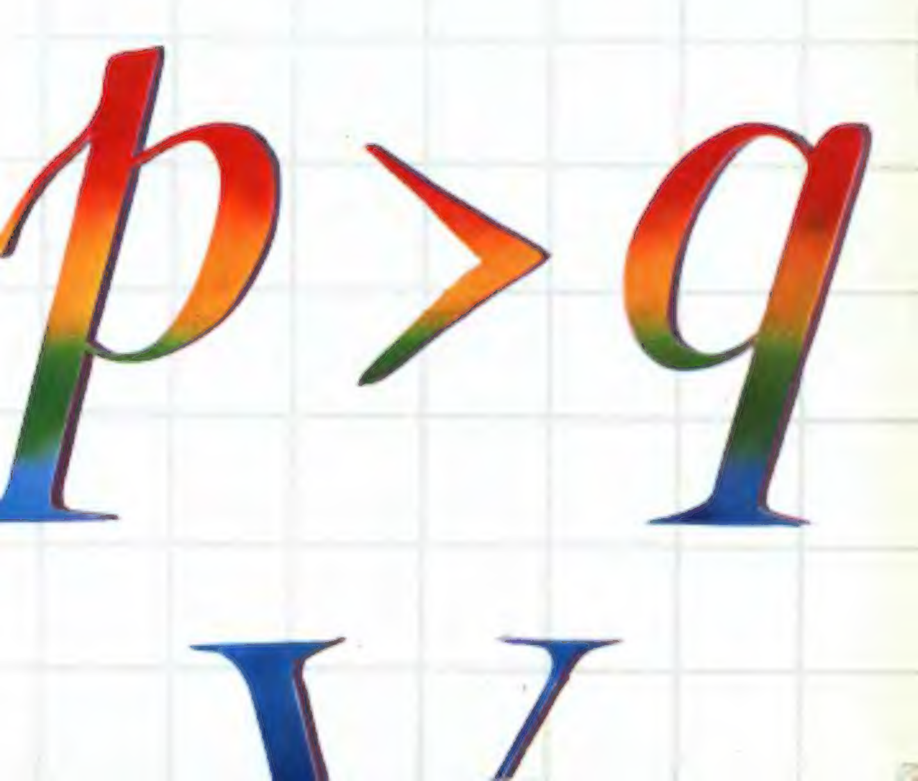
APRENDE TÚ SOLO

Matemática moderna

L. C. Pascoe



L. C. PASCOE

Matemática moderna



Ediciones Pirámide, S. A. - Madrid

Título de la obra original:
MODERN MATHEMATICS

Traducción: Jaime Román Úbeda

Diseño de la cubierta: Narcís Fernández

A Winsome, Hilary y Peter

Primera edición, 1985
Segunda edición, 1987

Don Ramón de la Cruz, 67. 28001 Madrid
Depósito legal: M. 511-1987
ISBN: 84-368-0279-9
Printed in Spain
Imprime: Hijos de E. Minuesa, S. L.
Ronda de Toledo, 24. 28005 Madrid

Índice

Introducción

El concepto de matemática moderna ha cristalizado ampliamente como resultado de la invención, en Gran Bretaña, del ordenador digital electrónico, de gran importancia para el álgebra booleana, una rama de las matemáticas que había permanecido ignorada durante un siglo. El descubrimiento dio ímpetu, entre otras cosas, al desarrollo de las matemáticas en las escuelas y universidades, donde existía ya malestar por el bajo nivel en su desarrollo. No transcurrió mucho tiempo antes de que comenzáramos a adaptar nuestra forma de pensar a la nueva situación, aunque influyentes círculos tardaron, al principio, en darse cuenta del tremendo impacto que las nuevas máquinas lógicas tendrían en nuestra forma de vida. Este autor se refirió a ello ya en 1958, en su primera edición de *Teach Yourself Arithmetic* (Cap. 17).

Este libro se ha escrito para aquellos que quieren comprender algo del trabajo latente y el propósito de las matemáticas modernas. Está especialmente diseñado para el estudiante que desea realizar sus estudios sin ninguna tutela. Cada tema es desarrollado lógicamente, y sólo presupone que el lector está familiarizado con el álgebra elemental (hasta solucionar sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas muy sencillas), geometría (propiedades elementales de los triángulos y paralelogramos), trigonometría (definiciones de seno, coseno y tangente) y los procesos básicos de la aritmética. Después de una introducción a los números reales y complejos, se estudian los vectores. Siguen los sistemas de numeración y sus propiedades, conjuntos y lógica (incluyendo teoría de circuitos). Se estudian las matrices sin hacer referencia a sus propie-

dades vectoriales y, finalmente, se introducen algunos temas de probabilidad, primero como sujeto independiente y después relacionado con la teoría de conjuntos. Los capítulos del 1 al 9 son simples y fáciles de entender. Los capítulos 10 y 11 requieren más reflexión, por lo que para su mejor comprensión el lector encontrará de gran ayuda tener papel y lápiz a mano cuando se enfrente con la teoría de circuitos. Los capítulos 12 y 13 pueden ser entendidos completamente, con independencia del 10 y del 11.

Al escribir un libro de esta naturaleza, debe decidirse, principalmente por cuestión de espacio, qué temas deben incluirse y cuáles omitirse. Se ha decidido excluir los diagramas de flujos, programación de ordenadores y el tratado de la construcción electrónica de las máquinas en sí mismas. Existen buenas razones para esta decisión. Las personas que trabajan con estas máquinas reciben una preparación especial en este campo. Otras dos omisiones dignas de destacar son la topología y el estudio de funciones. El primer tema representa un estudio demasiado avanzado para las pretensiones de esta obra, y no tendría sentido incluirlo. El estudio y representación de funciones podría ser más justificable, pero no son esenciales para el propósito actual.

1 Números reales

1.1. El origen de nuestro sistema de numeración

Las matemáticas han sido llamadas, correctamente, la reina y sirviente de las ciencias. A medida que se han desarrollado las matemáticas abstractas, se han intentado aplicar a ciencias más prácticas y el cambio de las necesidades científicas ha motivado el desarrollo de ciertos aspectos de las matemáticas. Hoy día, el hecho que ha motivado el mayor avance ha sido el desarrollo del ordenador.

Históricamente, las matemáticas no se han desarrollado como maduración equilibrada del pensamiento lógico, sino por saltos irregulares e intermitentes, algunas veces con lagunas de siglos entre avances importantes. Éstos surgen como consecuencia de los estudios efectuados por hombres interesados en la delimitación de nuevos procesos, y tales hombres aparecen en intervalos no próximos.

En los primeros tiempos sólo eran necesarias las más primitivas ideas de aritmética. En la prehistoria, el hombre no había necesitado contar, sino que conocía sus posesiones por ser muy determinadas. En un determinado momento, sin embargo, apareció el sistema de trueque —con los principios de la civilización— y fue necesario aprender cómo valorar y decir cuántas ovejas se cambiaban por un número de útiles. Tal vez, cierto número de piedras se amontonaban para significar el valor de una oveja, y otras se colocaban en un montón diferente y representaban el valor de una cazuela. Para realizar el cambio de algunas ovejas por utensilios, seguramente

tomaban las piedras alternativamente de uno y otro montón (correspondencia de uno a uno[1]) y las que sobraban en un montón después de haber acabado con el otro, se negociaban, por ejemplo, mediante la adquisición de una cacerola más pequeña. Si fue éste el sistema adoptado, es irrelevante. El ejemplo intenta ilustrar el uso de las piedras como unidad para materializar el valor de las cosas, y no habría de pasar mucho tiempo antes de que apareciera una forma más abstracta de contar (uno, dos, tres, etc.). Aquí ya tenemos el origen de los *números naturales* (1, 2, 3, ...), también llamados *enteros positivos*. Éstos son unidades de cualquier cosa, no solamente de dinero o valor.

En un principio, para contar, la gente usó los cinco dedos de una mano, y así apareció la numeración en base seis, en la que puede leerse 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, ..., es decir, existen seis símbolos o guarismos, incluido el cero. Hasta hace pocos años este sistema era ampliamente usado en Oriente. Los ábacos elementales que todavía se encuentran en China y Japón[2] están claramente diseñados para este sistema.

Es también fácil ver cómo el diez ha llegado a ser un número importante, motivado porque el hombre tiene diez dedos en las manos y diez en los pies. Por estas características del ser humano, se ha desarrollado el sistema decimal o base diez. Hay, sin embargo, una característica extraña en estos sistemas de numeración. Se podría esperar que en el sistema decimal se emplearan 10 guarismos distintos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *t*, y así podría leerse: 11, 12, ..., 19, 1*t*, ... Sin embargo, sólo usamos nueve elementos naturales (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) a los que añadimos el 0, lo que no es natural en absoluto, y así se tiene 1, 2, ..., 9, 10, 11, ...

Hasta ahora tenemos, en *base seis*, seis símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, y en el sistema decimal, diez: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, con lo que todo coincide perfectamente. Sin embargo, la introducción del cero fue un problema difícil. Mientras que era sencillo imaginar el número 4, como 4 vacas, 4 flechas, e incluso 4 esposas, era más complicado imaginar el cero representando «nada», por ejemplo un hombre que no poseía ninguna cabra era como si poseyese 0 cabras. Una vez que se solventó este problema, el progreso en el

---

[1] Un importante concepto en la geometría moderna.
[2] Véase *Arithmetic (Decimatised and Metricated)*, de este mismo autor.

campo de los números fue rápido, aunque durante mucho tiempo se contase solamente con los enteros positivos.

Es muy posible que la introducción del cero fuese una consecuencia directa del uso de los ábacos. Supongamos, por ejemplo, que somos miembros de una raza primitiva que posee solamente unos rudimentarios conocimientos de aritmética y que sumamos los números 1, 2, 3, 4, 5 (Fig. 1.1) y nunca hemos oído hablar del cero.

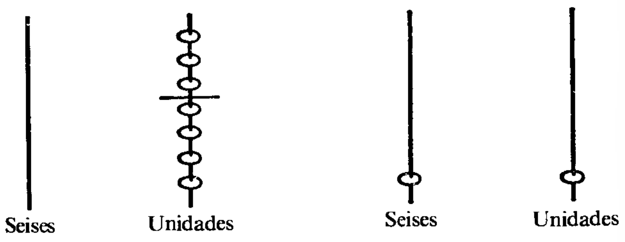


Figura 1.1

Transfiriendo seis cuentas desde la columna de las unidades a la de los seises y reemplazándolas por una en esta última, tendremos un seis y una unidad, es decir, 11 en base seis.

Supóngase ahora, sin embargo, que sumamos 4 y 2 en esta misma base (Fig. 1.2).

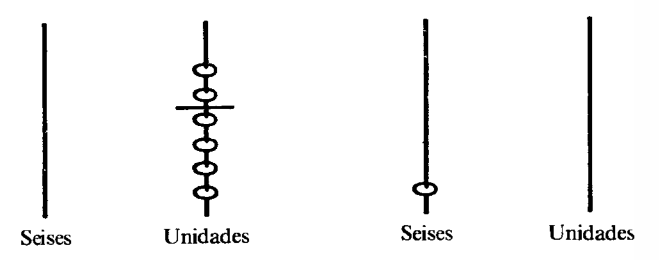


Figura 1.2

Llevando seis unidades a la columna de los seises y representándolas allí por un elemento, tendremos un seis y ninguna unidad, es decir, 1*. Evidentemente necesitamos el asterisco y adoptamos el cero (0) para representar ninguno. En base seis, la figura 1.2 arroja el número 10. Esto hace que podamos escribir: 1, 2, 3, 5, 10, 11, 12,

13, 14, 15, 20, 21, ..., como se indicó previamente. Hay *seis* símbolos, y de ahí viene el nombre de «base seis».

De igual forma podemos llegar al sistema decimal, al que estamos tan acostumbrados: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ... Los elementos que constituyen este sistema son, como ya se ha indicado, los números naturales o enteros positivos. La nomenclatura se adapta lógicamente al significado de los números. Los números enteros (completos) representan cosas completas de la vida real; si son positivas podemos pensar en ellos como naturales por referirse a cosas naturales.

EJERCICIO 1.1

1. En este punto, puede serle útil al lector la construcción de un ábaco elemental. No solamente será aclaratorio del trabajo referente a este capítulo, sino que será de gran valor para practicar las cuatro reglas (suma, resta, multiplicación y división) de la aritmética, cuando los números sean expresados en otras escalas (binaria, octal) que irán apareciendo a lo largo del libro.

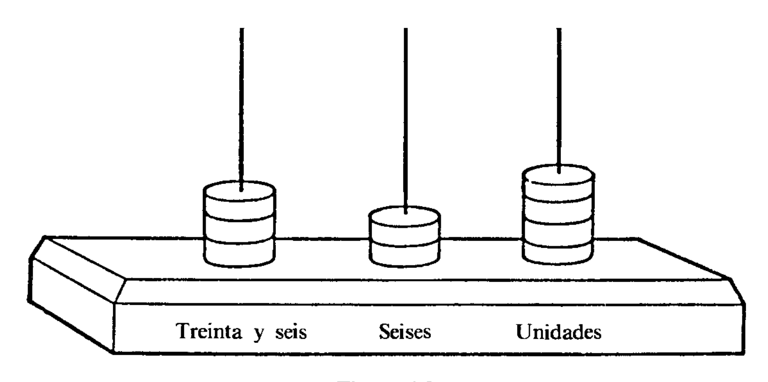


Figura 1.3

La figura 1.3 representa un ábaco, que puede construirse en casa en pocos minutos. Se clavan tres alambres rígidos en un bloque de madera, con la única restricción de que el bloque tenga el tamaño conveniente (12,5 cm de largo, 4 cm de ancho y 2 cm de alto suponen unas dimensiones razonables). El diámetro de los alambres depende de los agujeros practicados en las cuentas. Un par de

docenas de cuentas serán suficientes, y no deben ser excesivamente pequeñas o frágiles.

Los alambres deben ser suficientemente largos para permitir colocar 12 cuentas cada vez. El aparato de la figura permite tener cuentas con valor unidad, seis, o treinta y seis, es decir, cada columna tiene un valor seis veces mayor que la precedente. El máximo valor que podría representarse en este ábaco, 555, sería, traducido a base diez:

$$5 \times 36 + 5 \times 6 + 5 = 180 + 30 + 5 = 215$$

ya que en base seis, en la que no existe el 6, no podemos tener más de cinco cuentas en cada alambre, es decir, 15 entre los tres.

El número que está representado en el ábaco de la figura 1.3 es el 324 (base seis), es decir:

$$\begin{aligned} 324 \text{ (base seis)} &= 3 \times 36 + 2 \times 6 + 4 = \\ &= 108 + 12 + 4 = \\ &= 124 \text{ (base diez)} \end{aligned}$$

Obsérvese que el ábaco se puede usar para sumar y restar en base diez tan fácilmente como en base seis; de hecho, en cualquier otra escala, simplemente leemos de derecha a izquierda: *unidades*, *decenas* y *centenas*.

Si tuviésemos cuatro alambres en lugar de tres, el valor de las distintas columnas sería:

Base seis:	6^3	6^2	6	1
Base diez:	10^3	10^2	10	1

El mayor número que podría obtenerse en base seis, el 5555, puede traducirse en base diez como:

$$5 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 5 \times 6 + 5 = 1.295$$

siendo necesarias 20 cuentas en este caso.

Análogamente, el mayor número que podría obtenerse en base diez y con cuatro alambres sería:

$$9 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 9 = 9.999$$

y se necesitarían 36 cuentas.

2. Utilice el ábaco con tres alambres para realizar las siguientes operaciones, donde todos los números vienen dados en base seis, y exprese el resultado en la misma forma:

a) $5 + 4$;	*b*) $3 + 5 + 4$;	*c*) $11 - 4$;
d) $3 + 12 - 5$;	*e*) $23 + 15$;	*f*) $45 + 12 + 24$;
g) $315 - 240$;	*h*) $502 - 455 + 110$;	*i*) 3×4;
j) 4×22;	*k*) 2×135;	*l*) $410 \div 2$.

3. Escribir en base diez todos los números de la cuestión anterior y expresar, también en esta base, el resultado. Usar el ábaco en base diez para comprobar que los resultados son correctos.

1.2. El desarrollo de los números

Los números, en el pasado, eran frecuentemente incómodos. ¡Imaginemos sumar MCXLV y DCCVIII en tiempos de los romanos sin un ábaco a mano! Distintas notaciones fueron aportando mejoras, pero el mayor éxito lo constituyó la introducción del sistema indo-árabe de números (llamado Fibonacci), dado a conocer en Italia por Leonardo de Pisa, cuyo trabajo se basó en un tratado árabe. Todavía usamos esa representación hoy día.

En este libro, todos los números se encuentran en base diez, a menos que se indique lo contrario, y se reservará el término «decimal» para aquellos números que tienen parte entera y decimal.

Una vez que los números enteros fueron comprendidos, se introdujeron las fracciones para representar partes de una cosa. En un principio, las ideas al respecto no fueron muy elegantes. Los romanos sólo usaban fracciones con denominador 12, como 5/12,

8/12. Los egipcios eran felices con cualquier denominador, pero sólo admitían el 1 como numerador, como en 1/7, 1/144.

Debido suponer una verdadera pesadilla porque, además, no podían repetir ninguna fracción en la misma expresión. Un ejemplo ilustrará este problema: $2 \div 7$ podría escribirse como $1/4 + 1/28$, pero no 2/7 (como haríamos nosotros) ni tampoco $1/7 + 1/7$. Por alguna razón permitieron el número 2/3 como excepción.

El siguiente avance en el campo de los números fue la invención del número negativo. De nuevo se presentó un problema en el que rara vez nos fijamos actualmente. Supóngase un hombre que tuviera 5 caballos y comprara otros 3. Esta suma no presenta ningún problema:

$$5 + 3 = 8$$

y en ella la adición de dos números naturales conduce a otro natural (matemáticamente decimos que la suma es una operación interna en el conjunto de los números naturales). Supóngase, sin embargo, que en lugar de añadir caballos a su colección, decide vender algunos, digamos, por ejemplo, 3:

$$5 - 3 = 2$$

operación en la que, todavía, el resultado es un número natural. Nuestro hombre podría haber vendido más caballos de los que tiene en ese momento. Algún cliente podría haberle ofrecido un buen precio por 7 caballos y él podría aceptar con la condición de conseguir esos 2 caballos extra rápidamente. la situación quedaría

$$5 - 7 = -2$$

que significa que se deben 2 (en este caso caballos). Sea lo que sea, -2 no es un número natural. Investigaremos esto más detalladamente.

Los símbolos + y − parecen provenir de la Edad Media, de unas marcas que se hacían en los sacos de grano: el + (sobrante) indicaba que el saco pesaba más de lo normal (es decir, tenía algo

añadido) y el – (menos) que el saco era menos pesado de lo normal (le faltaba peso).

1.3. La recta de los números

Si dibujamos una línea horizontal con los números enteros situados en ella equidistantes y ordenados de izquierda a derecha en sentido ascendente, podemos entender fácilmente el ejemplo del apartado anterior. Las dos primeras operaciones no necesitan explicación:

$$5 + 3 = 8 \quad ; \quad 5 - 3 = 2$$

El manejo de los números negativos también es muy sencillo si extendemos la recta hacia la izquierda:

$$5 - 7 = -2$$

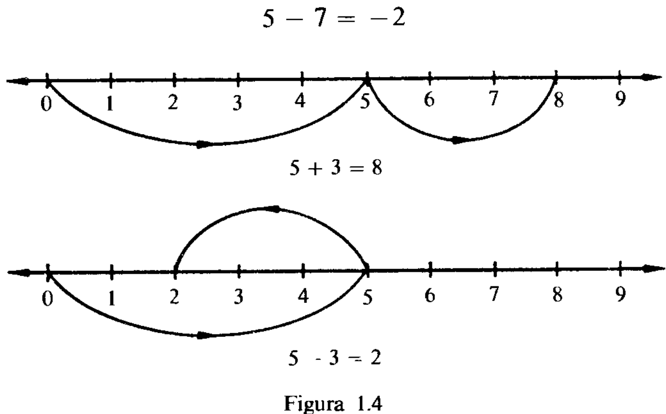


Figura 1.4

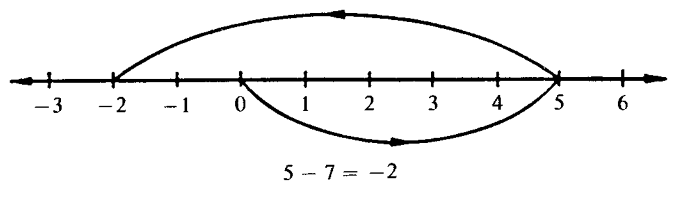


Figura 1.5

Las actividades de nuestro vendedor de caballos están ilustradas en las figuras 1.4 y 1.5.

Ya se ha mencionado que la suma es una operación interna en el conjunto de los números naturales, pero esto ya no se cumple con la resta porque aunque $5 - 3 = 2$ es un número natural, no ocurre así en $5 - 7 = -2$.

1.4. Los números racionales

La totalidad de los números, positivos y negativos, enteros y fraccionarios, junto con el cero forman el conjunto de los números racionales. Elementos de este conjunto son, por ejemplo:

$$17 \quad ; \quad -4 \quad ; \quad \frac{3}{4} \quad ; \quad 0 \quad ; \quad 0{,}66 \quad ; \quad -2\frac{3}{7}$$

En este conjunto son cerradas las operaciones suma, resta, multiplicación y división si se excluye el caso de división por cero.

Es interesante observar que los números racionales pueden representarse recurriendo a los decimales o a fracciones de la forma a/b, donde a y b son enteros. Por ejemplo:

$3/8 = 0.375$ ($0{,}375\dot{0}$, donde el cero final se repite periódicamente)

$3\frac{1}{6} = 3{,}1\dot{6}$ (3,16666...)

$\frac{1}{7} = 0{,}142857$ (0,14285714285714...)

1.5. Los números irracionales

A todo número racional le corresponde un punto en la recta de los números. Si se marcaran todos, aparecerían tan juntos que no se apreciaría discontinuidad alguna, pero esto no es así porque entre cada dos números racionales existe un número infinito de puntos que no corresponden a ningún número racional.

Considérese, en la figura 1.6, el cuadrado *OABC* de lado unidad. Entonces, $OA = 1$, y por el teorema de Pitágoras:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad ; \quad OB = \sqrt{2}$$

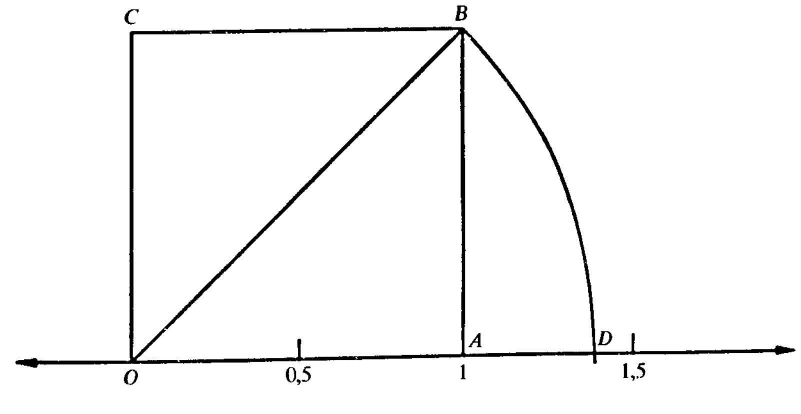


Figura 1.6

Si se dibuja *OA* sobre la recta de los números, con *O* coincidiendo en el cero, el extremo *A* coincidirá con el número 1. Si con centro en *O* y radio *OB* se dibuja un arco, que corte a la continuación de *OA* (a la recta) en el punto *D*, entonces $OD = \sqrt{2}$. Nótese que *OD* está entre 1,4 y 1,5 porque $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ y $(1{,}5)^2 = 2{,}25$, mientras que $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, que está entre 1,96 y 2,25. Se puede precisar más usando el número $\sqrt{2} = 1{,}14142136...$, que es un decimal en el que ninguna cifra o grupo de ellas se repite periódicamente. Un número con estas características se llama irracional. No existe ningún punto racional que lo represente en la recta hasta ahora estudiada.

La existencia de raíces irracionales de números como, por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, supuso una gran preocupación para los primeros matemáticos, que trataron de racionalizar dichos números, pero sin éxito. Si hubieran dispuesto del saber necesario, se habrían ahorrado mucho tiempo y muchos problemas, porque la prueba de que es irracional es muy directa. La demostración se da en el

apartado 1.6, pero el lector puede prescindir de su lectura hasta más adelante, sin que esto presente ningún problema para la continuidad del trabajo.

1.6. Demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional

Nótese en principio que: *a*) el cuadrado de un número par y entero es par también (todo número par se puede escribir $2k$, donde k es entero, y su cuadrado es $4k^2$ que, evidentemente, es divisible por 2); *b*) si la raíz cuadrada de un número par y entero es entera, entonces es par. Supóngase que el número N es par y entero y que su raíz cuadrada es entera e impar, es decir, $2k + 1$, donde k es entero, entonces (el símbolo $\Rightarrow$ significa «implica que»):

$$\sqrt{N} = 2k + 1 \Rightarrow N = (2k + 1)^2$$

es decir,

$$N = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 =$$
$$= \text{número par} + 1 = \text{número impar}$$

Pero habíamos dicho que N era par, y no puede ser par e impar a la vez, luego la raíz cuadrada no es impar, es decir, si es entero debe ser par.

Supóngase que la raíz cuadrada de 2 es racional. Entonces su valor puede expresarse de la forma a/b, donde a y b son positivos, enteros y primos [todo número decimal puede ponerse de esta forma; por ejemplo:

$$1{,}44 = \frac{144}{100} = \frac{36}{25} \quad , \quad \text{donde } a = 36,\ b = 25]$$

Entonces:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Luego a^2 es entero y par:

$$\Rightarrow a \text{ es par y entero según se ha visto en } b)$$
$$\Rightarrow a = 2k, \text{ donde } k \text{ es entero}$$

pero

$$2b^2 = a^2 \Rightarrow 2b^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow b^2 = 2k^2$$
$$\Rightarrow b^2 \text{ es par y entero}$$
$$\Rightarrow b \text{ es par y entero}$$

Según esto, tanto a como b tienen un factor común, el 2, lo que contradice la condición de que a y b sean primos. Es decir, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

1.7. Los números racionales como límite de los irracionales

Los griegos descubrieron un método para aproximar a los números irracionales mediante una sucesión de fracciones racionales cada vez más cercanas unas de otras. Construyeron una sucesión de pares de números de la siguiente forma:

a	b
1	1
2	3
5	7
12	17
29	41

El cociente b/a en cada una de las filas de la sucesión se hace más próximo a $\sqrt{2}$, a medida que descendemos. Además, cada

pareja está a un lado y a otro. de forma alternativa, del número buscado ($\sqrt{2} = 1{,}414213...$):

1.er par: $\frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1{,}0$ demasiado pequeño

2.º par: $\frac{b}{a} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ demasiado grande

3.er par: $\frac{b}{a} = \frac{7}{5} = 1{,}4$ demasiado pequeño

4.º par: $\frac{b}{a} = \frac{17}{22} = 1{,}416$ demasiado grande

5.º par: $\frac{b}{a} = \frac{41}{29} = 1{,}4131$ demasiado pequeño, etc.

Está claro que en cada etapa nos aproximamos más al verdadero valor.

La aceptación de los número irracionales se atribuye a Platón.

1.8. Aproximación de raíces cuadradas

Las ideas anteriores sugieren una forma de aproximar raíces cuadradas por números. Aunque resulta particularmente interesante por sus implicaciones matemáticas, no destierra el método que tradicionalmente describen los libros de aritmética, siendo particularmente útil cuando en el resultado se necesitan varias cifras significativas.

El procedimiento se entenderá mejor con un ejemplo.

Ejemplo. Calcular $\sqrt{5}$.

$$\sqrt{5} = y \Rightarrow 5 = y^2 \Rightarrow y = \frac{5}{y}$$

o también

$$y \times \frac{5}{y} = 5$$

Supongamos $y = 2$. Entonces:

$$5 \div 2 = 2{,}5 \;\Rightarrow\; 2 \times 2{,}5 = 5$$

Evidentemente, 2 es demasiado pequeño y 2,5 demasiado grande. Probemos con 2,2; entonces

$$5 \div 2{,}2 \simeq 2{,}27... \;\Rightarrow\; 2{,}2 \times 2{,}27 \simeq 5$$

Intentemos ahora con 2,24; entonces

$$5 \div 2{,}24 = 2{,}23 \;\Rightarrow\; 2{,}23 \times 2{,}24 = 5$$

Podemos ahora aproximar más con 2,235.

Realmente $\sqrt{5} \simeq 2{,}236$ ($\simeq$ significa «aproximadamente igual»).

Puede verse que en los sucesivos pasos del presente ejemplo cada suposición se encuentra a mitad de camino entre los dos números precedentes y tiene de esta forma una cifra decimal más.

1.9. El conjunto de los números reales

El conjunto de los números racionales junto con el de los números irracionales, forman el conjunto de los *números reales*. Si todos los números reales fueran representados por un punto en la recta de los números, no observaríamos discontinuidades, y podríamos definir la recta, siguiendo la terminología moderna, como la representación de los números reales (recta real).

EJERCICIO 1.2

1. Dados los números

$$3 \;;\; -2 \;;\; \sqrt{5} \;;\; 1\frac{1}{3} - 6 \;;\; 4{,}3$$

$$2 + \sqrt{7} \;;\; 0 \;;\; \sqrt{-2}$$

determinar cuáles son: *a*) naturales; *b*) racionales; *c*) reales; *d*) no reales (es decir, no pueden situarse en la recta real).

2. Demostrar que $\sqrt{3}$ está entre $1\frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{4}$.

3. Encontrar el sistema por el que se ha hecho la tabla del apartado 1.7. Escribir los dos siguientes pares de números y las siguientes aproximaciones a $\sqrt{2}$ hasta con cuatro cifras decimales.

4. Demostrar que $\sqrt{6}$ está entre 2,4 y 2,5. Encontrar la aproximación más cercana a $\sqrt{6}$ con dos cifras decimales (usar el método del apartado 1.6).

5. Demostrar que $\frac{1}{9} = 0.\dot{1}$ y que $\frac{1}{90} = 0{,}0\dot{1}$. Expresar 0,12 y 0.13 con la fracción adecuada y más sencilla.

6. Usando el método del apartado 1.8, encontrar con dos cifras decimales correctas las raíces cuadradas de 7, 10 y 17.

2 Los números complejos

2.1. Los números imaginarios

Considérese la ecuación $z^2 + 4 = 0$, esto es, $z^2 = -4$. Puede verse que la solución no se encuentra en la recta real considerada en el capítulo 1, porque no hay ningún número real que elevado al cuadrado dé un número negativo. Si probamos soluciones como $z = 2$ o $z = -2$, en la ecuación anterior, tendríamos $z^2 = 2^2 = 4$, o $z^2 = (-2)^2 = 4$, es decir, ninguna la satisface. Debemos, por tanto, buscar una nueva clase de números.

Resolviendo $z^2 = -4$ se tiene:

$$z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} \quad [\text{ya que } -4 = 4(-1)]$$

Si ahora escribimos $i = \sqrt{-1}$, entonces $z = \pm 2i$. No podemos marcar en la recta real un punto que represente este número, excepto si nos valemos de otra recta perpendicular a la anterior y que pase por el cero. Marquemos $+2$ y -2 unidades a partir del cero en esta nueva recta y convengamos que estas marcas representan $2i$ y $-2i$, respectivamente. Esta línea se llama *recta de los números imaginarios* o *eje imaginario* (por una razón que pronto veremos). De la misma forma, la recta real puede llamarse *eje real*. Por conveniencia, en ocasiones, abreviaremos escribiendo eje Im o Rl, al referirnos a ellos. El punto cero se denomina *origen*. Ambos ejes determinan lo que se denomina *plano complejo*.

En nuestra representación de $2i$ y de $-2i$ podemos decir que multiplicar por i supone un giro (en este caso de 2 y -2) de 90° en

el sentido contrario a las agujas del reloj, sentido que es arbitrario. En la figura 2.1 se ilustra la solución de la ecuación $z^2 + 4 = 0$.

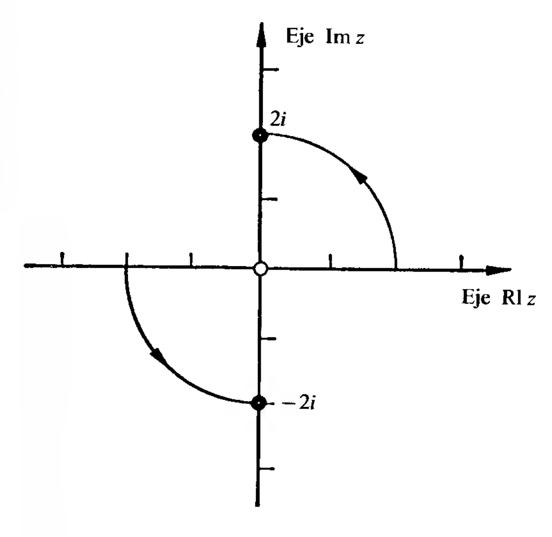


Figura 2.1

¿Seguirá funcionando este sistema si avanzamos un poco más? Supongamos que multiplicamos $2i$ por i. Entonces:

$$2i^2 = 2(\sqrt{-1})^2 = 2(-1) = -2$$

Esto significaría que 2 se ha convertido en -2 multiplicando dos veces por i, lo que claramente avala nuestra elección. Al multiplicar una vez por i producimos un giro de 90°; la segunda vez provoca un giro total de 180°, con lo que evidentemente 2 se convierte en -2 (Fig. 2.2).

Si se considera ahora $2i^3 = 2i(i)^2 = -2i$, lo que supone, de acuerdo con nuestra hipótesis, un giro de 270°, para completar los 360° se tiene $2i^4 = 2(i^2)^2 = 2(-1)^2 = 2$, que devuelve al número racional a su posición en la recta real. Si acudimos a potencias mayores del número i, repetiríamos el proceso anterior; por ejemplo, $2i^{17} = 2i(i^4)^4 = 2i$. Cada cuatro veces que multiplicamos el número i por sí mismo obtenemos $+1$.

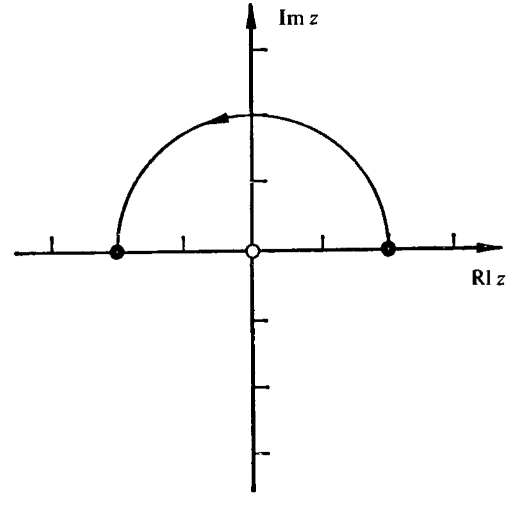


Figura 2.2

Resumiendo, las potencias de i son:

$$i = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1, \ldots$$

En la anterior discusión podríamos haber utilizado cualquier número, en lugar de 4, en la ecuación $z^2 + 4 = 0$. Si queremos que este número sea positivo, podemos poner a^2 (siendo a real). La ecuación puede ponerse como $z^2 + a^2 = 0$, siendo su solución $z = ai$ o $z = -ai$.

Si utilizamos la notación de conjuntos que se explicará en el capítulo 8 podemos escribir:

$$\{z: z^2 + a^2 = 0\} \Rightarrow z = ai \quad \text{o} \quad z = -ai$$

que se lee «si z es un elemento que pertenece al conjunto de los números que son solución de la ecuación $z^2 + a^2 = 0$, entonces z es ai, o bien $-ai$».

Ejemplo. Simplificar los siguientes números y determinar cuáles son reales y cuáles imaginarios: *a*) $3i^3$; *b*) $(2i)^5$; *c*) $(3i)^6$; *d*) $5i$.

Tenemos:

a) $3i^3 = -3i$; *b*) $(2i)^5 = 2^5 i^5 = 32i$

c) $(3i)^6 = 3^6 i^6 = -769$; *d*) $5i^{11} = 5i^3 = -5i$

simplificando las potencias de i tal como ya se ha explicado. Los números de los ejemplos *a*), *b*) y *d*) son imaginarios y *c*) es real.

EJERCICIO 2.1

1. Simplificar los siguientes números, determinando cuáles de ellos son reales y cuáles imaginarios: *a*) $4i^3$; *b*) i^{10}; *c*) $(2i)^7$; *d*) $6i^{15}$; *e*) $-1/2i^{14}$. Representar en el plano complejo los números *a*), *b*), *c*) y *e*) usando una escala 1/2 cm por unidad.

2. Demostrar que $1/i = -i$ y deducir que dividir por i equivale a un giro de 90° en el sentido de las agujas del reloj.

3. Simplificar: *a*) $(3i^3)(2i^2)$; *b*) $(-i)(-2i^4)$; *c*) $(2i)^2(3i^5)$; *d*) $(1/2i^2)(2i^5)$; *e*) $5i^{17} - 3i^{15}$; *f*) $i^4 - 2i^6 + 3i^8$.

4. Resolver las ecuaciones $4z^2 - 9 = 0$ y $4z^2 + 49 = 0$. Representar el resultado en el plano complejo.

2.2. Los números complejos

Los números considerados en el apartado anterior se representan por puntos en el eje real o en el imaginario. Supóngase, sin embargo, que tenemos un número con parte real e imaginaria, por ejemplo, $2 + 3i$. Necesitaríamos movernos 2 unidades a la derecha del origen sobre el eje real y 3 unidades hacia arriba paralelas al eje imaginario, porque multiplicando 3 por i se produce un giro de 90° en el sentido contrario a las agujas del reloj.

En la figura 2.3 puede observarse que si hubiéramos escrito $3i + 2$ hubiéramos llegado al mismo punto del plano, es decir:

$$3i + 2 = 2 + 3i$$

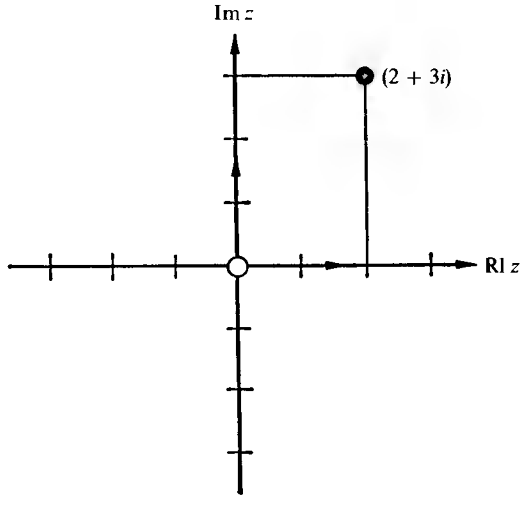


Figura 2.3

Nos encontramos ahora en posición de generalizar. Cualquier número complejo z puede escribirse de la forma $a + ib$, donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$, obteniendo:

$$z = a + ib = ib + a$$

Si $a = 0$, entonces $z = ib$, que es un número imaginario.
Si $b = 0$, entonces $z = a$, que es un número real.
De esto último se puede deducir que tanto los números reales como los imaginarios son casos especiales de los números complejos.

2.3. Las cuatro reglas aplicadas a los números complejos

Supóngase que tenemos dos números complejos:

$$z_1 = a + ib \quad ; \quad z_2 = c + id$$

a) *Suma:*

$$z_1 + z_2 = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d) = p + iq$$

donde p y q son números reales. Luego la suma de dos números complejos es otro número complejo.

b) *Resta:*

$$z_1 - z_2 = a + ib - (c + id) = a + ib - c - id =$$
$$= (a - c) + i(b - d) = r + is$$

donde r y s son reales, luego al hallar la diferencia de dos números complejos obtenemos otro número complejo.

c) *Producto o multiplicación:*

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd$$

Como $i^2 = -1$, según el apartado 1.7:

$$z_1z_2 = (ac - bd) + i(bc + ad) = t + iu$$

donde t y u son números reales. Es decir, el producto de dos números complejos es otro número complejo.

d) *División o cociente:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id}$$

No podemos avanzar más hasta que no consigamos un denominador real. Consideremos

$$(c + id)(c - id) = c^2 - i^2d^2 = c^2 + d^2$$

Vemos que multiplicando denominador y numerador del segundo miembro por $c - id$ tenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a + ib}{c + id}\right)\left(\frac{c - id}{c - id}\right)$$

donde el segundo paréntesis es la unidad, por lo cual no se altera el valor del segundo miembro de la ecuación. Operando:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + ibc - iad - i^2bd}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} =$$

$$= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + i\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) = v + iw$$

donde v y w, a pesar de ser más elaborados, son números reales. Por tanto, el cociente de dos números complejos es otro número complejo.

Nota: El proceso desarrollado en *d*) requiere que $z_2 \neq 0$, es decir, que c y d no sean cero simultáneamente.

Ejemplo. Dibujar en el plano completo $z_1 = 4 + 3i$ y $z_2 = 2 - 5i$. Medir y calcular la distancia que les separa.

La distancia que les separa según el eje real es $4 - 2 = 2$, y según el eje imaginario $3 - (-5) = 8$. Entonces utilizamos el teorema de Pitágoras (Fig. 2.4).

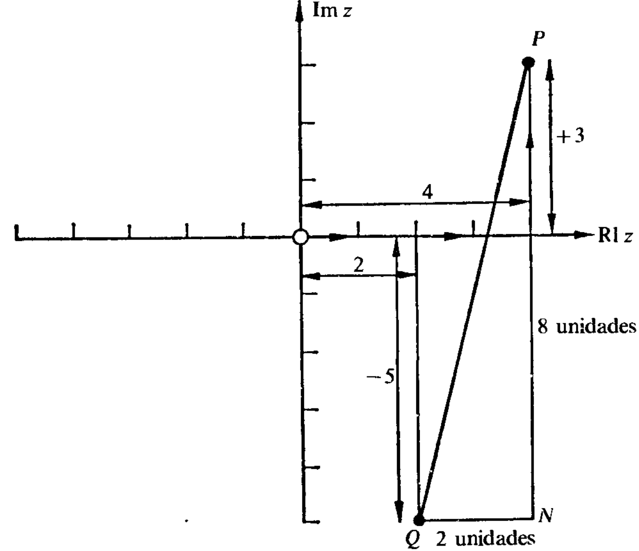


Figura 2.4

Midiendo, se obtiene $PQ \simeq 8{,}2$ unidades. Calculando con el teorema de Pitágoras:

$$PQ = \sqrt{QN^2 + NP^2} = \sqrt{4 + 64} \text{ unidades} =$$
$$= \sqrt{68} \text{ unidades} = 8{,}25 \text{ unidades}$$

EJERCICIO 2.2

1. Determinar cuáles de los siguientes números complejos son: *a*) reales; *b*) imaginarios puros, y *c*) aquellos que, después de simplificados, sólo pueden expresarse de la forma compleja $a + ib$, donde a y b son números reales:

$$i^5 \quad ; \quad i^6 \quad ; \quad 4i^7 \quad ; \quad -3i^4 \quad ; \quad 4 + 5i;$$
$$7 - 3i^7 \quad ; \quad 3i + 8i^3 \quad ; \quad 2 - i + i^3 \quad ; \quad 2 - i - i^3 \quad ; \quad 2i + \frac{1}{i}$$

2. Expresar todos los números de la cuestión 1 de la forma más simplificada posible.

3. Si $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 3 + 2i$, calcular:

$$a)\ 2z,\ 5z_2; \qquad b)\ 2z_1 + z_2; \qquad c)\ 4z_1 - 3z_2$$

4. Si $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 4i$, calcular:

$$a)\ z_1^2; \qquad b)\ z_1 \cdot z_2; \qquad c)\ \frac{z_2}{z_1}; \qquad d)\ \frac{4z_1 + z_2}{3z_1 - 2z_2}$$

Expresar el resultado de la forma más simplificada posible.

5. Simplificar:

$$a)\ \frac{3 + 2i}{3 - i}; \qquad b)\ \left(2i + \frac{1}{i}\right)(1 - i)$$

6. Representar los puntos $6 + 3i$ y $1 - 9i$ en el plano complejo. Calcular la distancia entre ellos y comprobar el resultado con el obtenido midiendo sobre el dibujo.

7. Situar los puntos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 2 - i$ en el plano complejo. Demostrar sobre el dibujo que $z_1 + 2z_2$ es un número real.

[*Sugerencia:* $2z_2 = 2(2 - i) = 4 - 2i$ representa doble distancia sobre el eje real y sobre el imaginario.]

Aunque hasta ahora sólo hemos tratado someramente algunos detalles sobre los números complejos, que constituyen una rama ciertamente avanzada de las matemáticas, era interesante introducir estos detalles para situar a los números reales dentro del ámbito general. Esta teoría es también una buena introducción al concepto de vector, que será ampliado en el capítulo siguiente.

2.4. Pares ordenados

Si consideramos un número complejo $z = a + ib$, podemos escribirlo de la forma $z = (a, b)$, como *par ordenado* (es decir, el orden en que coloquemos a, b es primordial). Se tomará a como la distancia hacia la derecha del origen —trabajando sobre un mapa podríamos decir *dirección este*— y b representará la distancia hacia arriba a partir del origen —*dirección norte*—. Este concepto está perfectamente de acuerdo con la idea (Ap. 2.1) de que multiplicando por i se produce un giro de 90° en el sentido contrario a las agujas del reloj. El número z es, en sí mismo, una traslación de A a C (Fig. 2.5).

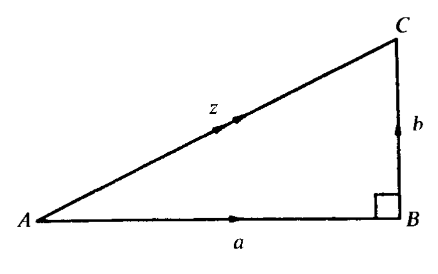


Figura 2.5

Hemos visto (Ap. 2.3) cómo sumar dos números complejos z_1 y z_2 de la siguiente forma:

Si $z_1 = a_1 + ib_1$, y $z_2 = a_2 + ib_2$, entonces:

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Expresado esto mismo por medio de pares ordenados:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Si, siguiendo con la terminología geográfica, nos movemos hacia el oeste, lo hacemos en sentido contrario al que lo hemos hecho hasta ahora. Así, en la figura 2.6 representamos $z = (-a, b)$, asumiendo que a, b son positivos.

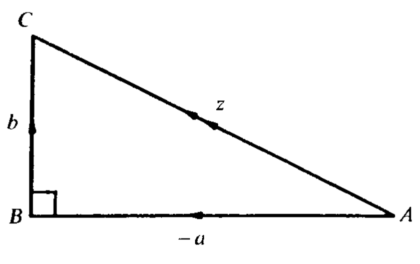


Figura 2.6

De la misma forma, si nos movemos hacia el sur, lo hacemos en sentido contrario en el eje vertical. Así, los pares ordenados $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ con origen en O de la figura 2.7, se pueden poner:

$$\vec{OA} = (a, b) \qquad \vec{OB} = (-a, b)$$

$$\vec{OC} = (-a, -b) \qquad \vec{OD} = (a, -b)$$

donde a y b son positivos.

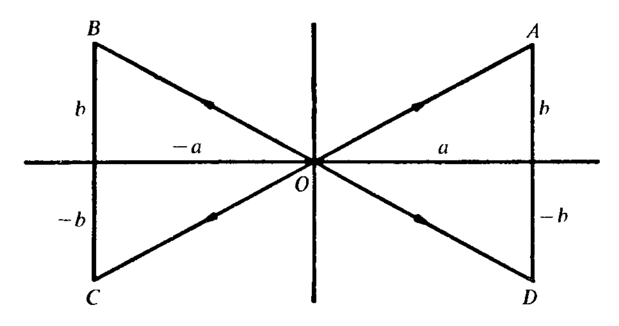


Figura 2.7

La notación $\vec{OA}$ indica que el desplazamiento se realiza desde O hacia A en módulo y dirección. Este concepto lleva a la definición de *vector*, que se dará en el capítulo 3.

Sin embargo, de momento consideramos operaciones algebraicas simples con pares ordenados. Sea $z_1 = a + ib$ y $z_2 = c + id$; entonces, $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$. Como ya hemos visto:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Del apartado 2.3 tenemos:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

$$(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$(a + ib) \div (c + id) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + i\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

Expresado esto como pares ordenados se tiene:

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

$$(a, b) \div (c, d) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

Es interesante detenernos en algunos casos especiales.

Ejemplo: Si $z_1 = (3, -2)$ y $z_2 = (12, 5)$, calcular $z_1 \cdot z_2$ y z_1/z_2. Si comparamos con $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, tenemos:

$$a = 3, \ b = -2, \ c = 12, \ d = 5$$

y según las fórmulas expuestas previamente:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, bc + ad) = (36 + 10, -24 + 15) = (46, -9)$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) = \left(\frac{36 - 10}{144 + 25}, \frac{-24 - 15}{144 + 25}\right) = \left(\frac{2}{13}, \frac{-3}{13}\right)$$

EJERCICIO 2.3

1. Demostrar que multiplicando o dividiendo un par ordenado por $(1, 0)$, aquél queda inalterado. [*Sugerencia:* Pruébese con el par genérico (a, b)].

2. Resolver y expresar el resultado como par ordenado:

a) $(3, 0) + (2, -5)$; *b*) $(0, 4) - (-2, 4)$;

c) $(7, 9) - (9, 8)$; *d*) $(0, 1) \times (0, 1)$;

e) $(a, b) \times (b, -a)$; *f*) $(a, b) \times (b, a)$;

g) $(x, y) - (0, 1)$; *h*) $(3, -5) \times (-2, 4)$;

i) $(-3, -2) \div (2, -4)$; *j*) $(a, 0) \div (-2a, 3a)$.

3. Representar en el papel los puntos $A(-3, -2)$, $B(2, -1)$, $C(3, 4)$. Dibujar el camino $\vec{AB} + \vec{BC}$ por medio de flechas, para representar el sentido del movimiento. Dibujar también $\vec{AC}$. Medir $AB + BC - AC$. Comparar este resultado con el obtenido por simple cálculo, usando el teorema de Pitágoras. [*Sugerencia:*

$$\vec{AB} = (2, -1) - (-3, -2) = (5, 1)$$

$$AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}, \text{ etc.}]$$

3 Vectores

3.1. Escalares y vectores

En nuestra vida diaria, aunque quizá no nos demos cuenta, encontramos dos entidades matemáticas distintas. Manejamos cantidades con una magnitud definida, pero para las que la dirección (de movimiento) no tiene importancia, y cantidades para las que ésta es de una importancia vital.

No es difícil diferenciar estos dos conceptos. En física, por ejemplo, longitud, masa y velocidad tienen magnitud pero no dirección. Este tipo de magnitudes se llaman *escalares*. Otras magnitudes físicas, como fuerza, momento y velocidad, dependen fundamentalmente de la dirección en la que actúan. Este tipo de magnitudes se denominan *vectores*.

El lector puede sentirse confundido por la doble mención de la velocidad. Eso es porque a veces utilizamos las unidades muy a la ligera. Si hablamos estrictamente, cuando decimos que un coche tiene una *velocidad* punta de 130 km/h, estamos empleando esta unidad como *escalar*, porque la dirección del movimiento no se está considerando para nada. Sin embargo, si decimos que viajamos hacia el sur a una *velocidad* de 130 km/h (tal vez algo ilegal), estamos usando la velocidad como *vector* (dirección sur, 130 km/h). Existe la misma diferencia entre *masa* y *peso*. La primera se refiere a una propiedad inherente a las moléculas que forman un cuerpo, y no depende del sitio donde el cuerpo esté situado. Esto no es cierto para el peso, que es la fuerza gravitatoria con que un cuerpo es atraído. A medida que nos alejamos de la superficie de la Tierra,

la fuerza con que el cuerpo es atraído se hace menor. Incluso puede apreciarse que esta fuerza no es la misma en diferentes puntos de la superficie del planeta. Por ejemplo, es diferente en el polo Norte que en el Ecuador[1].

Incluso despreciando el hecho de que la Tierra no es una esfera propiamente dicha, sino que está achatada por los polos, los vectores son claramente distintos, porque lo son sus direcciones (Fig. 3.1).

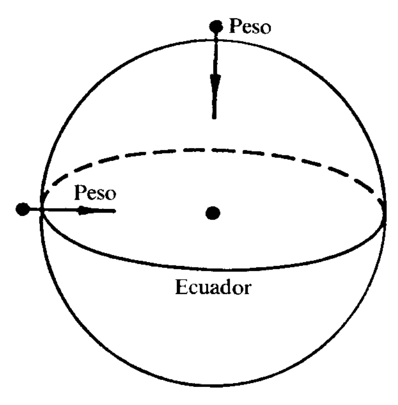


Figura 3.1

Muchas de las aplicaciones de los vectores se encuentran en las matemáticas aplicadas y en la física teórica, pero también podemos encontrar aplicaciones importantes en las matemáticas puras. En este libro nos restringiremos a ideas de desplazamiento, es decir, el cambio de posición de un punto a otro (introducido al final del capítulo 2) y la velocidad, mencionada anteriormente.

Manejaremos dos clases de vectores: 1) *vectores generalizados* o libres que vienen determinados por su módulo, dirección y sentido, y 2) *vectores fijos*, que tienen todas las características de los vectores generalizados, pero de los que necesitamos conocer, además, su punto de aplicación (son los más corrientes en la vida real). Los apartados 3.2 y 3.6 se dedicarán principalmente al estudio de los primeros y el apartado 3.7 analizará los segundos.

---

[1] Existe una complicación matemática —la Tierra gira—, pero no hay ninguna variación desde un punto de vista elemental.

3.2. Coordenadas y vectores

Considérese la figura 3.2, en la que OX y OY son ejes perpendiculares entre sí y P es un punto del plano XOY.

Existen dos formas de determinar la posición relativa de P respecto al origen O.

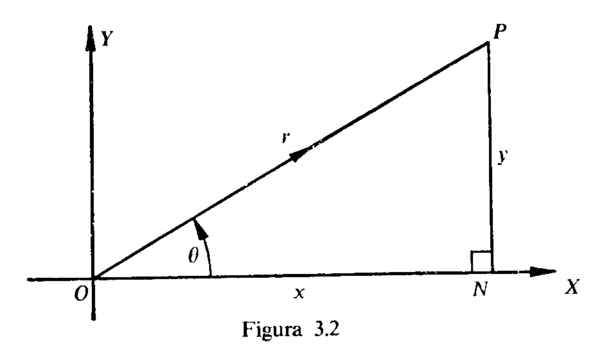


Figura 3.2

En primer lugar, el punto P tiene sus propias *coordenadas rectangulares* (o cartesianas), (x, y), medidas ambas desde el origen. Las coordenadas del punto constituyen un par ordenado en el sentido que se dio en el apartado 2.4, donde x representa un movimiento hacia el este. e y un movimiento hacia el norte, desde O hacia P.

En segundo lugar, podemos considerar P como una distancia r, medida desde O sobre una recta que forma un ángulo θ medido en el sentido contrario a las agujas del reloj desde la dirección OX, que llamaremos *línea inicial*. Decimos que P tiene dos coordenadas polares (r, θ). Llegado a este punto, debe aclararse que *no podemos manipular pares ordenados de coordenadas polares como si fueran pares de coordenadas rectangulares.*

En definitiva, podemos considerar al punto P como el extremo de un vector $\overrightarrow{OP}$, de módulo r y dirección θ (coordenadas polares) y componentes x e y (coordenadas rectangulares). La flecha sobre las letras OP, al referirnos al vector, indica que la traslación la realizamos desde O hasta P ($O \rightarrow P$). Por tanto, $\overrightarrow{PO}$ sería un vector de módulo la longitud de OP, pero que va de P hacia O. Este punto será discutido más adelante, en el apartado 3.3. Evitaremos colocar la flecha en sentido contrario (←) para evitar confusiones.

La trigonometría elemental[2] nos enseña que existen cuatro relaciones fundamentales entre las variables consideradas x, y, r, θ. Tres de ellas son trigonométricas y la otra es algebraica.

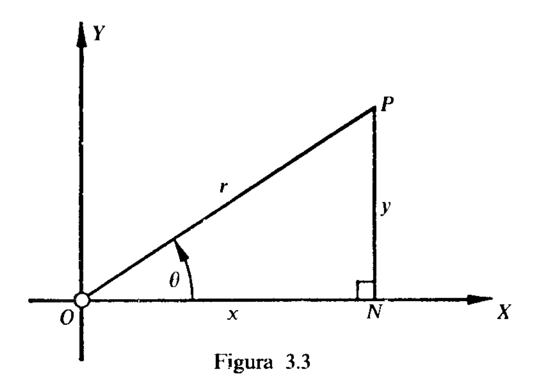


Figura 3.3

En la figura 3.3 se tiene:

$$\frac{ON}{OP} = \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{NP}{OP} = \text{sen}\,\theta$$

$$\frac{x}{y} = \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{y}{r} = \text{sen}\,\theta$$

De aquí se obtienen las siguientes expresiones:

$$x = r\cos\theta \tag{1}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{2}$$

que pueden usarse para el paso de coordenadas polares a rectangulares.

También en la figura 3.3:

$$OP^2 = ON^2 + NP^2 \quad \text{y} \quad \text{tg}\,\theta = \frac{NP}{ON}$$

---

[2] El lector que tenga alguna dificultad con las más elementales razones trigonométricas puede acudir a *Teach Yourself Trigonometry*, E.U.P., o a algún otro tratado elemental. Sólo se requiere un conocimiento muy simple.

es decir,

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{3}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \tag{4}$$

que puede servirnos para el paso de coordenadas rectangulares a polares.

Las cuatro relaciones establecidas no son independientes entre sí; dadas dos de ellas pueden deducirse las otras.

Por ejemplo, de (1) y (2), elevando al cuadrado y sumando:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = r^2$$

que es la ecuación (3).

De igual modo, dividiendo (2) entre (1) se tiene:

$$\frac{x}{y} = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r \cos \theta} = \operatorname{tg} \theta \qquad \text{[que es la ecuación (4)]}$$

En el trabajo que se lleva a cabo en este libro, r generalmente se considerará positivo y θ un ángulo comprendido entre 0 y 360°, medido en el sentido contrario a las agujas del reloj, a partir del semieje OX. Los valores de x e y podrán ser positivos o negativos. No hay ninguna restricción al tomar r como positivo.

Si, por ejemplo, el punto P tiene de coordenadas rectangulares $(a, -b)$, donde a y b son positivos, resulta:

$$r^2 = a^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

y por convenio se toma $r = +\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

La figura 3.4 ilustra los cuatro casos posibles, estando todos ellos de acuerdo con la trigonometría elemental.

Ejemplo. Si $\overrightarrow{OP}(12, 5)$ y $\overrightarrow{OQ} = (12, -5)$, escribir las coordenadas polares de P y Q.

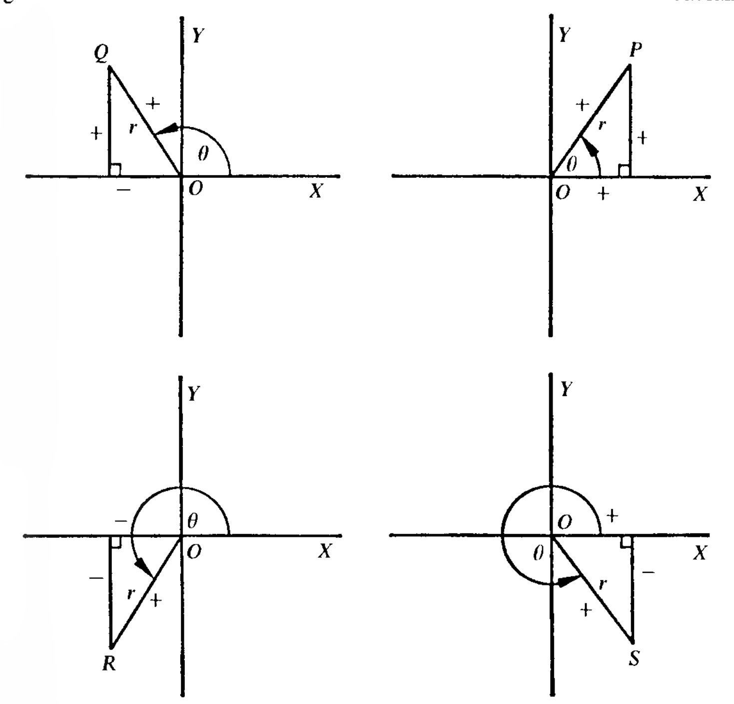


Figura 3.4

Un diagrama, como el de la figura 3.5, que no necesitamos hacerlo a escala, puede servirnos de ayuda.

Para OP se tiene $x = 12$, $y = 5$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} \Rightarrow r = 13$$

y

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{12} \simeq 0{,}413 \Rightarrow \theta = 23^\circ$$

Luego las coordenadas polares de P son $(13, 23^\circ)$. También podemos decir $\vec{OP} = (13, 23^\circ)$. Los ingenieros eléctricos muy a menudo escriben $(13, \underline{|23})$.

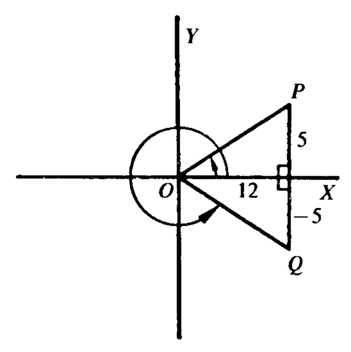


Figura 3.5

Para $\overrightarrow{OQ}$, se tiene $x = 12$ e $y = -5$:

$$r^2 = x^2 + y^2 = 12^2 + (-5)^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow r = 13$$

igual que en el caso anterior, pero para el ángulo

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{5}{12} = -0{,}417 \Rightarrow \theta = 360^\circ - 23^\circ = 337^\circ$$

(El dibujo indica claramente esto, pero sin él podríamos habernos encontrado con algunos problemas. De la figura 3.4 se deduce que la tangente es negativa en el segundo cuadrante y en el cuarto, y podríamos haber llegado a la conclusión errónea de que $\theta = 180^\circ - 23^\circ = 157^\circ$. Existe un método alternativo para resolver este problema y es considerando los signos del seno, coseno y tangente, pero el lector encontrará el dibujo más simple.)

Por tanto, las coordenadas polares de Q son $(13, 337^\circ)$. Puede escribirse también $\overrightarrow{OQ}, = (13, 337^\circ)$.

Ejemplo. Si $\overrightarrow{OR} = (4, 30^\circ)$, escribir las coordenadas rectangulares de R. Se tiene

$$x = r\cos\theta = 4\cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

y

$$t = r\operatorname{sen}\theta = 4\operatorname{sen} 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

Las coordenadas de R son $(2\sqrt{3}, 2)$, o también, $\overrightarrow{OR} = (2\sqrt{3}, 2)$.

Nota: La tabla 3.1 será útil una vez memorizada por el lector. Los resultados pueden ser extraídos de cualquier libro de trigonometría elemental.

TABLA 3.1

Ángulo / Razón	0	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

EJERCICIO 3.1

1. Expresar, por sus coordenadas rectangulares, los vectores que se dan a continuación en coordenadas polares: *a*) $(10, 60°)$; *b*) $(8, 45°)$; *b*) $(3, 0°)$; *d*) $(5, 90°)$; *e*) $(1, 30°)$; *f*) $(2, 120\ )$; *g*) $(6, 225°)$.

2. Expresar, en forma polar, los siguientes vectores dados por los siguientes pares de coordenadas cartesianas: *a*) $(3, 4)$; *b*) $(3, -4)$; *c*) $(-3, 4)$; *d*) $(-3, -4)$.

3. Si OP es el punto $(5, 2)$ y Q el $(3, 4)$, expresar $\overrightarrow{PQ}$: *a*) como par de coordenadas cartesianas, y *b*) en forma polar.

4. Dados los vectores $\overrightarrow{OP} = (1, -3)$, $\overrightarrow{OB} = (2, 1)$, $\overrightarrow{OC} = (-1, 2)$: *a*) Calcular la diferencia entre el valor de $(AB + BC)$ y el de AC. *b*) Expresar $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ en forma polar *c*) Valor del ángulo BAC. [*Nota:* Un pequeño dibujo puede ser de utilidad, pero no es necesario para el presente ejercicio.]

5. Sean los vectores $\overrightarrow{OH} = (3, 90°)$, $\overrightarrow{OK} = (4, 150°)$. Representar en un dibujo el vector $\overrightarrow{HK}$. Calcular la distancia HK. Si $\overrightarrow{ON}$ es perpendicular a $\overrightarrow{HK}$, encontrar el ángulo que $\overrightarrow{ON}$ forma con el semieje OX. [*Sugerencia:* Trabajar en coordenadas cartesianas.]

3.3. Suma de vectores

Cuando sumábamos dos escalares, siempre esperábamos un resultado único y simple. Así:

$$3m + 2m = 5m$$

$$4{,}60 \text{ kg} + 2{,}55 \text{ kg} = 7{,}15 \text{ kg}$$

Esto no es siempre cierto cuando se suman vectores. Aquí hemos de tener en cuenta la dirección como factor importante.

Considérese la figura 3.6, en la que $\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{AC} = (b_1, b_2)$. Si completamos el paralelogramo $ABCD$ dibujando BD paralela a AC se tiene:

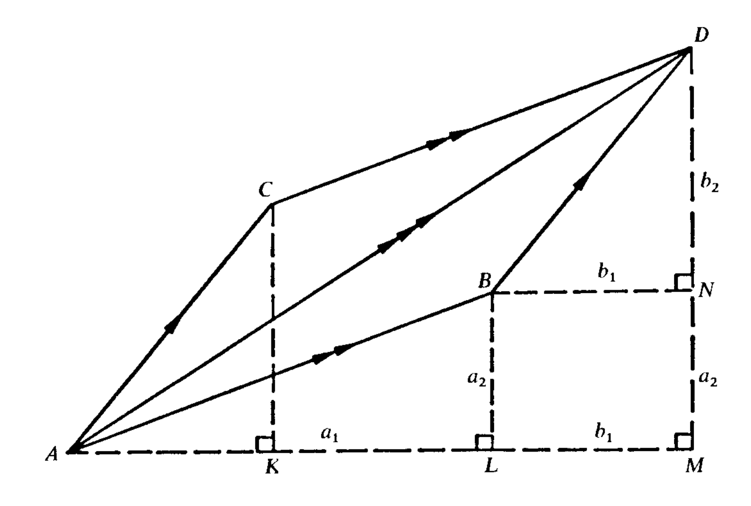


Figura 3.6

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} =$$
$$= (a_1, a_2) + (b_1, b_2) =$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \qquad \text{[según el Ap. 2.4]}$$
$$= (AM, MD) = \overrightarrow{AD}$$

Claramente se ve que la longitud de AD es menor que la longitud ($\vec{AB} + BD$). Esto se deduce del teorema euclidiano, por el cual la suma de dos lados de un triángulo es siempre mayor que la longitud del otro lado. Por tanto, el vector suma de dos dados no tiene por módulo la suma de los módulos, y su dirección es diferente a cualquiera de los lados. Al sumar $\vec{AB}$ y $\vec{BD}$ llegamos al vector $\vec{AD}$, uniendo los extremos de $\vec{AB}$ y $\vec{BD}$ en el mismo orden de desplazamiento[3]. Puede observarse que aunque hemos establecido cuidadosamente el movimiento desde el punto inicial del vector hasta su punto final, no hemos establecido ninguna restricción en cuanto a la localización del punto inicial. Por tanto, hasta ahora, dos vectores con el mismo módulo, dirección paralela y mismo sentido, son iguales. En la figura 3.7, $\vec{AB} = \vec{PQ}$.

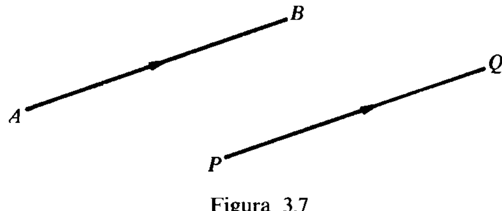


Figura 3.7

Si el vector apunta en sentido contrario, cambia su signo, pero su magnitud (longitud) no se ve afectada, lo cual es bastante razonable; así, en la figura 3.8, si hacemos $\vec{RS} + \vec{SR}$ empezamos en R y vamos a S, y luego volvemos a R, en definitiva no vamos a ningún sitio.

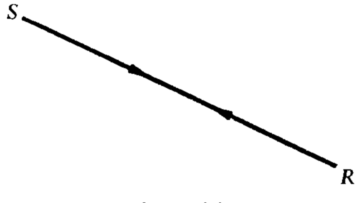


Figura 3.8

[3] Existe, por supuesto, un caso especial en el que $\vec{AB}$ y $\vec{BD}$ están en el mismo sentido sobre la misma recta r. La magnitud o módulo de $\vec{AB}$ es, así, $\vec{AB} + \vec{BD}$, y la dirección de $\vec{AD}$ es la misma que la de $\vec{AB}$ y $\vec{BD}$.

Debe tenerse en cuenta el desplazamiento realizado, pero el vector resultante es el cero. Decimos entonces:

$$\vec{RS} + \vec{SR} = 0 \quad ; \quad \vec{RS} = -\vec{SR}$$

es decir, si

$$\vec{RS} = (x, y) \Rightarrow \vec{SR} = (-x, -y)$$

Esto se verifica fácilmente porque:

$$\vec{RS} + \vec{SR} = (x, y) + (-x, -y) = (0, 0) = 0$$

En la figura 3.7 vemos que $\vec{AB}$ y $\vec{PQ}$ tiene el mismo sentido, pero en la figura 3.8, $\vec{RS}$ y $\vec{SR}$ tienen sentidos contrarios, es decir, se miden en sentido contrario sobre la misma recta (o sobre rectas paralelas).

En coordenadas polares si $\vec{RS} = (r, \theta)$, entonces tenemos que $\vec{SR} = (r, 180^\circ + \theta)$, es decir, el mismo desplazamiento, pero en sentido contrario. El lector debe notar de nuevo que no puede sumar vectores por sus coordenadas polares, de la misma forma que lo hace si tiene sus coordenadas cartesianas. Podemos obviar este problema si escribimos $\vec{SR} = (-r, \theta)$. Veremos en el apartado siguiente cómo puede ayudarnos esto.

3.4. Producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar por un vector no cambia la dirección de éste, pero sí su módulo. Supóngase $\vec{AB} = (x, y)$. Entonces, si hacemos

$$3\vec{AB} = (x, y) = (3x, 3y)$$

o en polares,

$$3\vec{AB} = (3r, \theta)$$

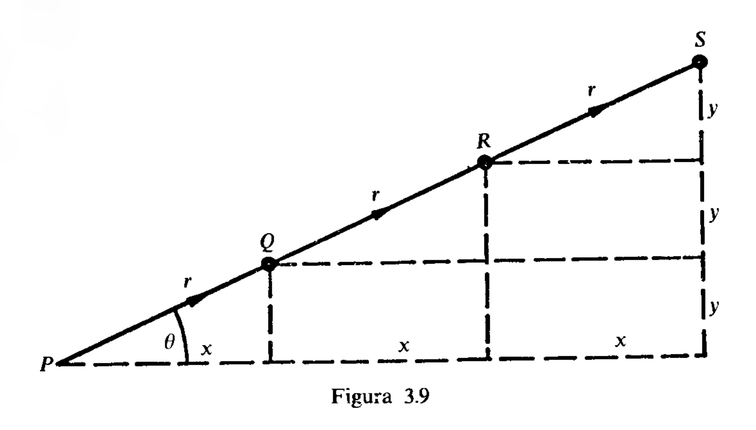


Figura 3.9

En la figura 3.9 puede verse claramente que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RS}(=\overrightarrow{AB})$$

y sumando en forma cartesiana:

$$3\overrightarrow{AB} = (x, y) + (x, y) + (x, y) = (3x, 3y)$$

La dirección del movimiento no ha cambiado, y la distancia total recorrida puede ponerse como

$$PS = PQ + QR + RS = 3r \quad ; \quad 3\overrightarrow{AB} = (3r, \theta)$$

Sea, de nuevo, $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, y multipliquemos por -1. En coordenadas rectangulares, $-\overrightarrow{AB} = (-x, -y)$, como ya hemos visto. En coordenadas polares, $-\overrightarrow{AB} = (-r, \theta)$, es decir, multiplicamos la componente r por -1 y dejamos θ como estaba. Esto sugiere que podemos sumar coordenadas polares sólo cuando el ángulo en los pares ordenados considerados es el mismo. Esto es lógico, ya que los vectores estarían sobre la misma recta, y estaría de acuerdo con la nota 3 de la página 49.

3.5. Notación abreviada

En lugar de representar un vector por sus puntos extremos y una flecha indicando su sentido, podemos usar una letra minúscula en negrita. Así, en la figura 3.10, si $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, entonces $\overrightarrow{BA} = -\mathbf{a}$.

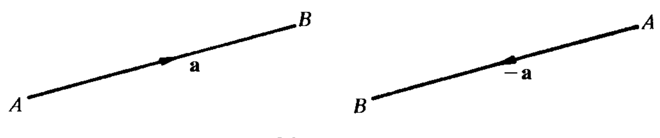


Figura 3.10

Usaremos esta notación en los ejercicios siguientes.

Ejemplo. En la figura 3.11, expresar **x** en función de **a** y **b**.

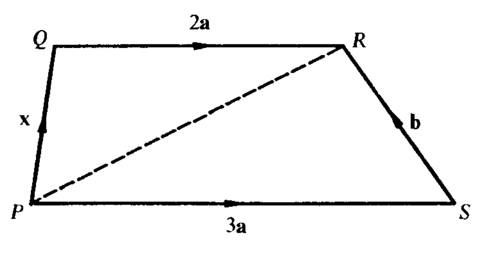


Figura 3.11

Dibujando la diagonal *PR* se tiene

$$\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR} = \mathbf{x} + 2\mathbf{a}$$

y también

$$\vec{PR} = \vec{PS} + \vec{SR} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} + 2\mathbf{a} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

es decir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

Es interesante resaltar, en este ejemplo, que *PQRS* es un trapecio, y que $\vec{QR} = 2\mathbf{a}$ y $\vec{PS} = 3\mathbf{a}$ —ambos resultantes de multiplicar **a** por un escalar— son paralelos.

Este ejemplo puede resolverse en una forma algo diferente, que además recuerda uno de los principios fundamentales en la suma de vectores. Debemos tener cuidado de sumar vectores solamente

cuando el principio de uno de los sumandos sea el final de otro, y deberemos hacerlo en riguroso orden desde el principio al final[4].

Así, en la figura 3.11 tenemos:

$$\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RS} + \vec{SP} = \mathbf{0}$$

Como puede apreciarse, al sumar estos vectores, hemos vuelto al punto inicial.

Ahora sea

$$\vec{PQ} = \mathbf{x}\ ,\ \vec{QR} = 2\mathbf{a}\ ,\ \vec{RS} = -\vec{SR} = -\mathbf{b}\ ,\ \vec{SP} = -\vec{PS} = -3\mathbf{a}$$

Así,

$$\mathbf{x} + 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - 3\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

y

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

como antes.

Merece la pena hacer hincapié en este punto, observando las figuras 3.12 y 3.13.

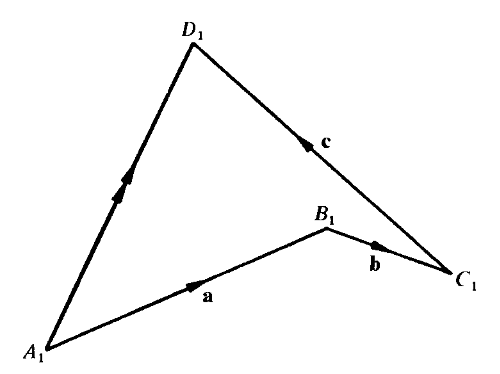


Figura 3.12

[4] Las matemáticas solucionan fácilmente este problema, pero los principiantes deben mantenerse fieles a este principio hasta que adquieran cierta soltura.

En la figura 3.12 tenemos:

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1D_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

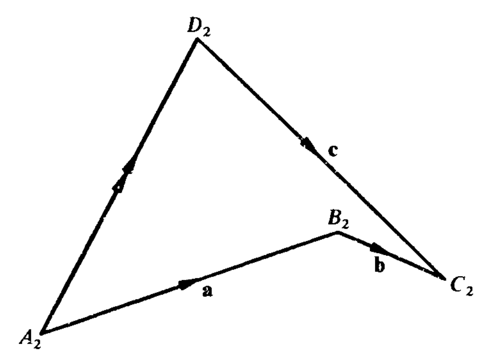


Figura 3.13

En la figura 3.13 tenemos:

$$\overrightarrow{A_2D_2} = \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2C_2} + \overrightarrow{C_2D_2} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

La flecha con dos puntas indica el resultado de la suma de los tres vectores. Puede usarse, por supuesto, para indicar la suma de un número cualquiera de vectores, sumados de esta forma, aunque esta notación no es utilizada de forma universal.

EJERCICIO 3.2

1. Si $\mathbf{a} = (3, 2)$, $\mathbf{b} = (-4, 3)$, $\mathbf{c} = (2, -1)$, $\mathbf{d} = (-1, 0)$, $\mathbf{e} = (0, -5)$, $\mathbf{f} = (-3, 2)$, calcular:

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}$; *b*) $\mathbf{c} - \mathbf{f}$;

c) $2\mathbf{a} + \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$; *d*) $\mathbf{a} + \mathbf{d} + \mathbf{f}$;

e) $3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{e} + \mathbf{f}$; *f*) $2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + 4\mathbf{d}$.

2. Si $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -3)$ y $\mathbf{c} = (-1, 2)$, dibujar cada una de las siguientes operaciones:

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; *b*) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$; *c*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$;

d) $\mathbf{b} - \mathbf{c}$; *e*) $\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$; *f*) $\mathbf{a} - 2\mathbf{c}$.

3. Si $\overrightarrow{OP} = (3, -2)$ y $\overrightarrow{PQ} = (1, 5)$, encontrar la dirección a seguir y la distancia a recorrer desde O hasta Q. Escribir el resultado como par de coordenadas polares.

4. Un avión vuela con viento en calma, investigando un accidente, recorriendo el camino $OPQRST$, donde $\overrightarrow{OP} = (1, 2)$, $\overrightarrow{PQ} = (2, -1)$, $\overrightarrow{QR} = (-1, -5)$, $\overrightarrow{RS} = (-3, -1)$ y $\overrightarrow{ST} = (3, 3)$. Calcular la dirección que debe seguir el avión y qué distancia ha de recorrer si regresa directamente a la base desde T. Dibujar en un diagrama el camino seguido y el que ha de tomar, señalando como vectores los tramos de su itinerario.

5. En el triángulo ABC, si $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$ y $\overrightarrow{BC} = \mathbf{q}$, ¿qué es $\overrightarrow{AC}$? [*Sugerencia:* Dibujar un pequeño esquema.]

6. Si en el triángulo XYZ, $\overrightarrow{XY} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}$, ¿quién es $\overrightarrow{YZ}$? [*Sugerencia:* Un vector se encuentra en sentido contrario al que se necesitaría para la suma. Cambiarle el signo antes de hacerla.]

7. En el paralelogramo $ABCD$ de la figura 3.14, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$. Escribir los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ de las diagonales en función de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. ¿Qué representa $\overrightarrow{DB}$? El resultado es de gran aplicación en el análisis vectorial.

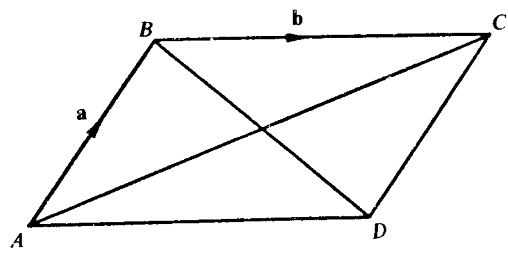


Figura 3.14

8. En la figura 3.15 expresar $\mathbf{a}$ en función de los otros vectores.

9. En la figura 3.16 expresar $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\mathbf{e}$ en función de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$.

10. En la figura 3.17 calcular $\overrightarrow{OM}$ en función de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ solamente. [*Nota:* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \mathbf{c}$.]

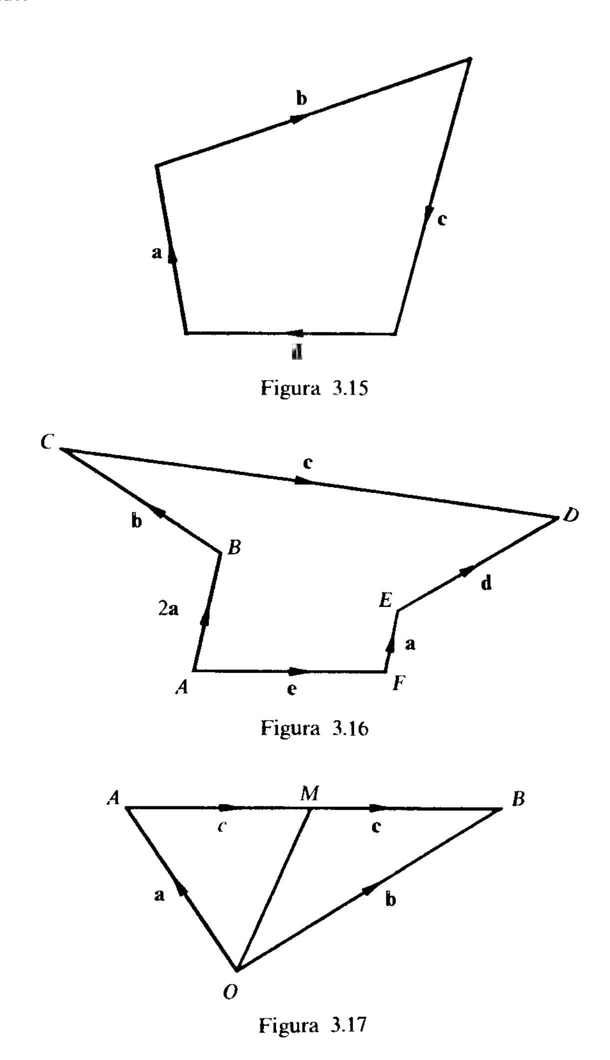


Figura 3.15

Figura 3.16

Figura 3.17

3.6. Aplicación de los vectores a problemas de velocidad

Supóngase que Emilio, que ha tenido una noche muy movida, está sentado en una silla a bordo de un barco que viaja en dirección este a una velocidad de 12 nudos. De repente, Emilio cree

haber visto una gran alca. (¡Qué imaginación! Ese pájaro se extinguió hace muchos años.) Se levanta de la silla y va hacia popa a una velocidad de 3 nudos para examinar su «alca» cuidadosamente. La verdadera velocidad respecto del mar mientras camina es (12 − 3) nudos, es decir, 9 nudos en dirección este (Fig. 3.18).

A 12 nudos 3 nudos B
C

Figura 3.18

$$\vec{AB} + \vec{BC} = (12, \text{este}) + (-3, \text{este}) = (9. \text{este})$$

Podemos sumar dos pares ordenados de coordenadas polares cuando el ángulo es el mismo. Obsérvese que los vectores $\vec{AB}$, etc., en este caso no representan distancia, sino velocidad.

Supóngase ahora que Emilio, una vez recuperado de la resaca, se vuelve y camina hacia proa a una velocidad de 3 nudos. Su velocidad ahora, respecto del mar (Fig. 3.19), viene dada por:

A B C
12 nudos 3 nudos

Figura 3.19

$$\vec{AB} + \vec{BC} = (12, \text{este}) + (3, \text{este}) = (15. \text{este})$$

Es decir, se mueve con una velocidad de 15 nudos hacia el este, esto es, (15 nudos, 0°).

Cansado de caminar de un extremo a otro del barco, Emilio comienza a andar de estribor a babor con la misma velocidad de 3 nudos. El problema para calcular la velocidad resultante es más complejo, porque lleva una velocidad de 12 nudos hacia el este y otra de 3 nudos hacia el norte.

Es más fácil de ver si imaginamos a Emilio como un pequeño objeto situado en un pedazo de papel transparente sobre esta página. Se mueve el papel 4 unidades a la derecha y al mismo tiempo el objeto se mueve 1 unidad hacia arriba. [*Nota:* 12

nudos : 3 nudos = 4:1, es decir, estamos representando a escala el problema de Emilio.] Si se repite este movimiento, el papel se moverá 8 unidades a la derecha, mientras que el objeto lo hace 2 unidades hacia arriba, y así sucesivamente. Claramente se puede ver (Fig. 3.20), que el camino recorrido por el objeto sobre esta página es la línea AC_1C_2...

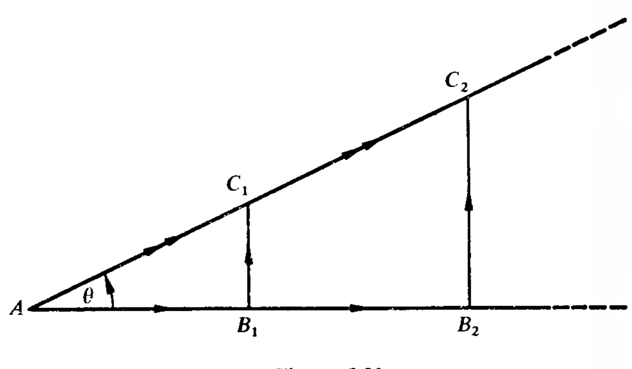


Figura 3.20

En la teoría de vectores es corriente representar el vector unitario sobre el eje OX por la letra **i**, y el vector unitario sobre el eje OY por **j**. Por tanto, si v es la velocidad resultante de Emilio en el último caso considerado, se tiene:

$$\mathbf{v} = 12\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Luego

$$v = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153} \simeq 12{,}4 \text{ nudos}$$

y

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

luego

$$\theta = 14^\circ \quad \text{(a partir de tablas)}$$

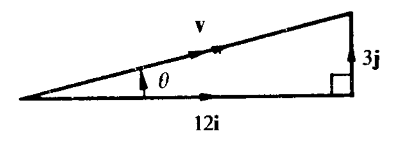


Figura 3.21

Es decir, la velocidad resultante de Emilio es N 76° E, 12,4 nudos.

El lector que esté familiarizado con los términos de navegación, puede observar que hay una pequeña dificultad. En coordenadas polares, la dirección se mide en el sentido contrario a las agujas del reloj a partir del eje OX y puede valer de 0 a 360° (más si se consideran varias vueltas), mientras que en navegación la dirección (curso) se mide en el sentido de las agujas del reloj, desde la dirección norte, y puede variar desde 0 a 360°. En consecuencia, hemos adoptado la antigua notación en la que se mide a partir del norte hacia el este o el oeste y desde el sur, hacia el este o el oeste, por ejemplo: N 15° O, S 72° O, S 33° E.

Ejemplo. Un río fluye a una velocidad de 4 km/h. José María, con una lancha motora, cruza el río, que tiene 110 m de ancho, a 8 km/h. ¿A qué distancia río abajo llega la barca a la otra orilla?

En el viaje de vuelta, José María decide cruzar el río sin desviarse. ¿Qué dirección debe tomar si la velocidad relativa es la misma? ¿Qué velocidad absoluta llevaría la motora?

a) *Viaje de ida*

En la figura 3.22, $\overrightarrow{AX}$ es la velocidad de la motora sobre el agua y $\overrightarrow{XY}$ es la velocidad del río. Luego $\overrightarrow{AY}$ es la velocidad absoluta de la lancha.

Por semejanza de los triángulos CBA e YXA:

$$\frac{CB}{AB} = \frac{YX}{AX} \quad ; \quad \frac{CB}{110} = \frac{4}{8} \Rightarrow CB = 55$$

Luego la distancia que la motora se ha desviado río abajo es de 55 m.

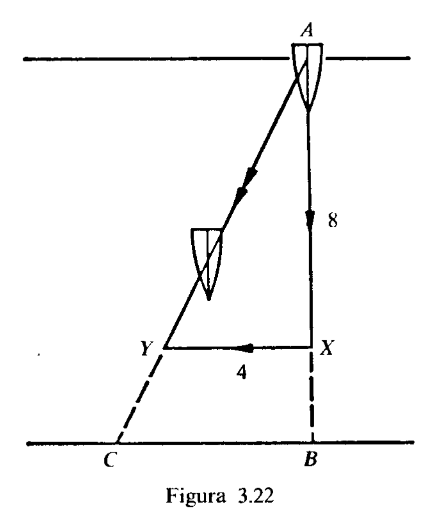


Figura 3.22

Es interesante advertir que hemos comparado un triángulo de desplazamiento con otro de velocidades.

b) *Viaje de vuelta*

Este problema es algo más sutil. Mientras el río arrastra a la lancha una distancia de 4 unidades, la lancha es capaz de recorrer una distancia total de 8 unidades. Dibujemos $CP = 4$ unidades (Fig. 3.23) río abajo desde C, que es el punto de partida para el viaje de vuelta. Haciendo centro en P, y con radio 8 unidades, dibujamos el arco PQ que corte a CD. El camino resultante cruza el río perpendicularmente (que es lo que se pedía en el problema). $\overrightarrow{PQ}$ es la velocidad resultante de la motora. El curso al que debe orientarse es $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{PQ}$, empezando en C (el lector debe recordar que para que los dos vectores sean iguales, deben tener el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido).

Tenemos

$$\cos\theta = \frac{PC}{PQ} = \frac{4}{8} = 0{,}5 \Rightarrow \theta = 60$$

Luego el curso (dirección) a seguir forma un ángulo de 60° con la orilla del río, visto en sentido ascendente.

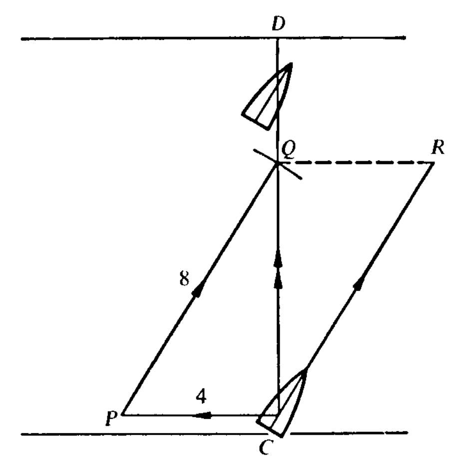


Figura 3.23

La velocidad absoluta cruza el río perpendicularmente y es $\vec{CQ}$. Usando el teorema de Pitágoras se tiene

$$CQ^2 = PQ^2 - PC^2 \Rightarrow CQ = \sqrt{PQ^2 - PC^2} =$$

$$= \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \simeq 6{,}93$$

El módulo de la velocidad absoluta es 6,93 km/h.

EJERCICIO 3.3

1. Un avión vuela a una velocidad constante, respecto del aire, de 120 nudos, de oeste a este, y regresa de nuevo. La distancia que debe recorrer al ir (o al volver) es de 210 millas náuticas. Si hay un viento del este de 30 nudos, calcular: *a*) la velocidad respecto a la Tierra en el viaje de ida; *b*) la velocidad respecto a la Tierra en el viaje de vuelta; *c*) el tiempo total de vuelo.

2. Un avión vuela en dirección sur con una velocidad respecto del aire de 108 nudos y existe un viento del oeste de 45 nudos. ¿Qué dirección lleva el avión realmente y cuál es su velocidad resultante?

3. El avión de la cuestión 2 viaja de nuevo, a una velocidad de 108 nudos y con viento del oeste de 45 nudos. ¿Qué dirección debe llevar realmente el avión para que su velocidad resultante sea efectivamente hacia el sur?

4. Dos barcos salen del puerto simultáneamente. Uno marcha hacia el norte a una velocidad de 12 nudos y el otro hacia el oeste a 8 nudos. ¿Cuál es el ángulo que separa sus dos direcciones de viaje? ¿A qué distancia se encuentra uno del otro después de dos horas?

5. Abbotsville está a 200 km al NE de Bishopsbury. El viento sopla del norte y lleva una velocidad de 40 km/h. Un avión parte de Abbotsville y vuela con una velocidad constante de 160 km/h respecto del aire hacia Bishopsbury y luego retorna a su base. Dibujar a escala, en un papel milimetrado, un diagrama indicando las direcciones que el avión ha tenido que seguir, tanto a la ida como a la vuelta. Obtener estos resultados y la velocidad del avión respecto a la Tierra. ¿Cuánto tardará el avión en hacer cada recorrido?

3.7. Vectores fijos

Hasta ahora hemos tratado fenómenos en los que son aplicables los vectores en general (libres). Ahora abordaremos problemas en los que el punto de aplicación es de gran importancia; de hecho, mediremos los vectores desde el origen aunque no le asignemos la letra O en algunos momentos.

Supóngase que sabemos que el punto P sobre $\vec{PQ}$ está situado respecto del origen O, por $\vec{OP} = \mathbf{a}$. Si $\vec{PQ} = \mathbf{b}$, cualquier otro vector $\vec{PR}$ situado sobre $\vec{PQ}$ puede ponerse $k\mathbf{b}$, donde k es un escalar que multiplica al vector $\mathbf{b}$. El vector fijo que nos da la posición de R respecto de O se presenta en la figura 3.24.

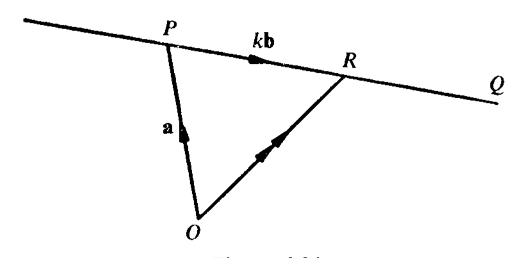


Figura 3.24

$$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{PR} = \mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

Si k es positivo, R está en el mismo lado que Q, respecto de P. Si k es negativo, R se encuentra en el lado contrario.

Ejemplo. $ABCD$ es un cuadrado de lado unidad (Fig. 3.25). P es el punto medio de AB y Q está a 1/3 de B. Si AQ y BP se cortan en R, encontrar AR.

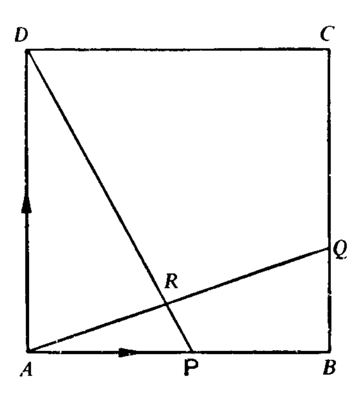


Figura 3.25

Sea[5] $\vec{AB} = \mathbf{i}$ y $\vec{AD} = \vec{BC} = \mathbf{j}$. Entonces $\vec{AP} = 1/2\mathbf{i}$ y $\vec{BQ} = 1/3\mathbf{j}$. Tomando A como origen, se tiene:

$$\vec{AQ} = \mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j}$$

Cualquier punto R de $\vec{AQ}$ puede ponerse como un vector fijo en A:

$$\vec{AR} = k\left(\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{i}\right) \tag{5}$$

Ahora

$$\vec{DP} = \vec{DA} + \vec{AP} = \vec{AP} - \vec{AD} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

[5] Nótese que **i** y **j** ya fueron definidos en la página 58.

Cualquier punto R sobre $\overrightarrow{DP}$ es $l(1/2\mathbf{i} - \mathbf{j})$ tomando D como origen. Llevando aquí también el origen hasta A, se tiene:

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DR} = \mathbf{j} + l\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j}\right) \qquad (6)$$

Como R es un único punto de (5) y de (6):

$$k\mathbf{i} + \frac{1}{3}k\mathbf{j} = \mathbf{j} + \frac{1}{2}l\mathbf{i} - l\mathbf{j}$$

donde k y l son valores a determinar. Es decir:

$$\left(k - \frac{1}{2}l\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{3}k - 1 + l\right)\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Esto sólo es posible si los coeficientes de **i** y de **j** son ambos cero, porque **i** y **j** están en distintas direcciones (realmente son perpendiculares, pero es igual con tal de que no sean paralelas):

$$k = \frac{1}{2}l = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}k - 1 + l = 0$$

luego

$$l = 2k \quad \text{y} \quad k + 3l = 3$$

Sustituyendo l en función de k tenemos:

$$k + 6k = 3 \Rightarrow 7k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{7}$$

Sustituyendo k en la ecuación (5):

$$\overrightarrow{AR} = \frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{1}{7}\mathbf{j}$$

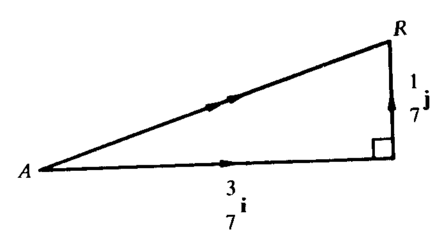


Figura 3.26

Aplicando ahora el teorema de Pitágoras, porque **i** y **j** son perpendiculares (¡esta vez es una ayuda!) (Fig. 2.36):

$$AR^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{9+1}{49} = \frac{10}{49}$$

$$AR = \frac{\sqrt{10}}{7} \simeq \frac{3{,}162}{7} = 0{,}45 \text{ unidades}$$

Una vez que se haya entendido el ejemplo, pueden omitirse muchos de los pasos dados.

EJERCICIO 3.4

Muchas, pero no todas, las cuestiones están relacionadas con vectores fijos.

1. Sea O el origen, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{AP} = \mathbf{r}$. El punto Q está sobre $\overrightarrow{AP}$. Expresar $\overrightarrow{OQ}$ en función de $\mathbf{a}, \mathbf{r}$ y un escalar k. [*Sugerencia:* Es conveniente un pequeño esquema.]

2. En la figura 3.27, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Escribii $\overrightarrow{AB}$ en función de **a** y **b**. Si P es cualquier punto de $\overrightarrow{AB}$ y $AP : AB = k : 1$, expresar $\overrightarrow{OB}$ en función de **a**, **b** y k. [*Sugerencia:* Como $AB : AB = k : 1$, $AP = kAB \Rightarrow AP = k \cdot \overrightarrow{AB}$.]

3. Demostrar, por vectores, que la línea que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralela al tercer lado y mide la mitad de éste. [*Sugerencia:* Si el triángulo es ABC, considérese $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$.]

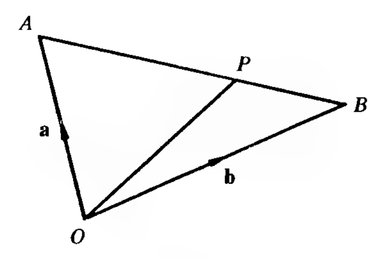


Figura 3.27

4. Demostrar, por vectores, que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

5. En el paralelogramo $ABCD$, E es el punto medio de AB y F es el punto medio de BC. Las líneas AF y DE se cortan en k. Demostrar que $Ak : kF = 2 : 3$.

6. Sea el triángulo ABC. Los puntos L, M y N son el punto medio de BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que AL, BM y CN son concurrentes (se cortan en un punto). Si ese punto es G, demostrar que $AG : GL = 2 : 1$. [*Sugerencia:* Tomar A como origen y hacer $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ y $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$.]

4 Sistemas de numeración

4.1. Sistemas de numeración

En la aritmética normal se usa el sistema decimal (o base diez), aunque en algunos países, como Gran Bretaña, su sistema monetario se basa en el 12. No obstante, en la actualidad existe, en el mundo civilizado, una fuerte corriente a favor de la adopción del sistema decimal. Con ello, las transacciones comerciales se ven muy simplificadas, así como el trabajo de los jóvenes en la escuela.

El sistema decimal, a pesar de las ventajas que aporta en la vida cotidiana, no siempre es el ideal para las necesidades de las matemáticas. Veremos que el sistema binario (base dos) y el octal (base ocho) tienen una considerable importancia. El renovado interés en el álgebra de Boole (Cap. 6) ha surgido por la invención de los ordenadores electrónicos, y con ello ha aparecido un gran entusiasmo por la aritmética binaria, ya que estas máquinas requieren que la información sea traducida a base dos para ser analizada. Todo ello es debido a que los complicados circuitos de un ordenador siempre trabajan en un sistema con SÍ-NO. Un circuito puede aceptar información (SÍ equivale a 1) o no aceptarla (NO equivale a 0) y, por tanto, sólo son necesarios el 1 y el 0. Para poder trabajar con cualquier número ha de traducirse al sistema binario.

Nosotros, sin embargo, comenzaremos nuestro estudio por el sistema en base seis, ya comentado en el capítulo 1, apartado 1.1, no solamente porque fue el primero en aparecer, sino porque en muchos aspectos es el más sencillo de seguir. Los números en este sistema, recordemos, son: 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21,...

4.2. Sistema en base seis

Para traducir un número de base diez a base seis, debemos comprender qué es lo que significa él y sus cifras.

Así, por ejemplo, el número 5473, en base diez, significa:

Millares	Centenas	Decenas	Unidades
5	4	7	3

Es decir,

$$5473 = 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3 =$$
$$= 3 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 \text{ (en orden inverso)}$$

En general, un número N puede escribirse, en base diez, como:

$$N = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \cdots$$

donde todo a pertenece[1] al conjunto $\{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$ (esto es, $a_r \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ para $r = 0, 1, 2, ...$). Los dígitos a_0, a_1, a_2, ... representan el número de unidades, decenas, centenas, millares, etc., y así podemos continuar, aunque si vamos demasiado lejos todos los elementos a serán iguales a cero y perderíamos el tiempo.

No existe ninguna razón por la que el número deba suponerse como suma de potencias de 10 y no de otro número. En base seis se tiene:

$$N = b_0 + b_1 \cdot 6 + b_2 \cdot 6^2 + b_3 \cdot 6^3 + \cdots$$

donde todo $b_r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ para todo $r = 0, 1, 2, ...$

A lo largo de este capítulo los números en base diez no se señalarán de forma especial, pero sí los de cualquiera otra base, a los cuales se les pondrá un *subíndice*. Por ejemplo, 47_6 significa «47 (leído cuatro-siete y no cuarenta y siete) en base seis». También se les puede distinguir por cualquier otro distintitvo determinado.

[1] La notación de conjuntos se explicará en el capítulo 6. El símbolo $\in$ significa «pertenece a».

Traduzcamos ahora el número 547 a base seis:

$$\begin{array}{rr}
6) & 5473 \\
6) & \underline{912} + 1 \\
 & \underline{152} + 0 \\
6) & \underline{25} + 2 \\
 & 4 + 1
\end{array}$$

Ahora podemos leer, en el sentido indicado por la flecha:

$$5473 = 41201_6$$

Fácilmente podemos poner:

$$41201_6 = 4 \cdot 6^4 + 1 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6 + 1 =$$
$$= 5184 + 216 + 72 + 0 + 1 = 5473$$

Este ejemplo demuestra la sencillez para pasar un número en cualquier base a base diez.

La tabla de multiplicar en base seis es un buen ejemplo:

×	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	10	12	14
3	3	10	13	20	23
4	4	12	20	24	32
5	5	14	23	32	41

Ejemplo. Multiplicar $(25 \times 34)_6$. La notación significa que los números están en base seis.

Usando la tabla:

$$\begin{array}{r}
34 \\
\times 25 \\
\hline
302 \\
112 \\
\hline
1422
\end{array} \quad \text{(base seis)}$$

Comprobemos: $1 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 2 = 216 + 144 + 12 + 2 =$ $= 374$:

$$25_6 = 17 \quad ; \quad 34_6 = 22 \quad ; \quad 17 \times 22 = 374$$

Esta comprobación en base diez es innecesaria una vez que se ha adquirido cierto dominio en diversos sistemas.

EJERCICIO 4.1

Los números en las cuestiones 1-3 están todos en base seis.

1. Calcular: *a*) 31 + 52; *b*) 254 − 125; *c*) 315 − 424 + 105.

2. Multiplicar: *a*) 41 por 32; *b*) 405 por 43; *c*) 1543 por 305.

3. Dividir: *a*) 433 entre 3; *b*) 1103 entre 25; *c*) 10045 entre 41.

4. Convertir los siguientes números a base diez: *a*) 3154_6; *b*) 20403_6; *c*) 100001_6.

5. Pasar los números siguientes de base diez a base seis: *a*) 1.479; *b*) 10.101; *c*) 73.942.

6. Comprobar los resultados de las cuestiones 1-3 llevando tanto los datos como el resultado a base diez.

7. ¿Cuántos dígitos son necesarios para expresar: *a*) el número 10^7 en base diez, en base seis; *b*) el número 14^{11} en base seis, en base diez?

4.3. Sistema binario (base dos)

La gran importancia del sistema binario en el mundo de los ordenadores ha sido ya comentado. Es un sistema muy sencillo de usar, con sus dos únicos dígitos, el 1 y el 0. El proceso de contar puede verse como:

Base diez	1	2	3	4	5	6	7	8 ...
Base dos	1	10	11	100	101	110	111	1000...

Por ejemplo, 6 (en base diez) viene dado por:

$$6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 110 \text{ (en base dos)}$$

De la misma forma:

$$1011011_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2 + 1 =$$
$$= 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91 \text{ (base diez)}$$

Aquí nos hemos ayudado de subíndices para indicar la base dos, como ya se advirtió.

Las tablas completas, para la suma y la multiplicación, son:

$1 + 0 = 1$	$1 \times 0 = 0$
$1 + 1 = 10$	$1 \times 1 = 1$

Y a primera vista podrían parecer el sueño celestial de cualquier escolar. La tabla de comparación entre el sistema binario y la base diez, vista anteriormente, nos indica el gran tamaño del número, en binario, que representa al 8 (en base diez). Así, 8 = 1000, necesitamos cuatro dígitos. Todavía puede verse esto más claro si comparamos:

$$91 = 1011011_2 \text{ (siete dígitos)}$$

Ejemplo. Expresar en base dos el número 985:

2) 985
2) 492 + 1
2) 246 + 0
2) 123 + 0
2) 61 + 1
2) 30 + 1
2) 15 + 0
2) 7 + 1
2) 3 + 1
1 + 1

$$985 = 1111011001_2$$

Leemos hacia arriba, en la dirección de la flecha.

Lo que hemos hecho es encontrar los factores, 0 ó 1, de todas las potencias de 2, hasta 2^9, que es la más alta que necesitamos. Esto significa:

$$9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5 = 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + $$
$$+ 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + $$
$$+ 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$$

La transformación en el otro sentido es muy sencilla también.

Ejemplo. Expresar 10111011_2 como número en base diez.

Escribimos el número hacia abajo, empezando por la unidad menor:

Dígito binario	Multiplicador	Producto
1	1	1
1	2	2
0	2^2	0
1	2^3	8
1	2^4	16
1	2^5	32
0	2^6	0
1	2^7	128
		187

$10111011_2 = 187$

Por supuesto, no es necesario escribir todo esto cuando las potencias de 2 se manejan con cierta soltura. Fácilmente, un número no demasiado grande puede traducirse eliminando la columna central o simplemente haciendo:

$$10111011_2 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2 + 1 =$$
$$= 128 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 187$$

Estos ejemplos pueden ilustrar lo cansado que puede ser el trabajo con números binarios. Cualquier persona podría volverse loca en cuanto tuviese que manejar números de cierto tamaño, pero esto no es, en absoluto, inconveniente para un ordenador

electrónico. Las operaciones en tales máquinas son tan rápidas que las dimensiones de los números tiene poquísima importancia. Es, sin embargo, interesante e importante para el estudiante interesado en la matemática moderna practicar con algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo. Sumar los siguientes números en binario:

$$1011 \;,\; 1101 \;,\; 111$$

Tenemos

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 1101 \\ 111 \\ \hline 11111 \end{array}$$

Proceso: Sumar la columna de las unidades, $1 + 1 + 1 = 11$. Escribir el 1 debajo y arrastrar para la siguiente el 1 (acarreo).

Sumar la columna de valor 2, $1 + 0 + 1 + 1$ (acarreo) $= 11$. Escribir 1 y acarrear 1 también.

Sumar la columna de peso $(2)^2$, $0 + 1 + 1 + 1$ (acarreo) $= 11$. Escribir debajo el 1 y dejar como acarreo 1 también. Sumar la columna de peso $(2)^3$, $1 + 1 + 1$ (acarreo) $= 11$.

Puede comprobarse:

$$\begin{array}{rl} 1011_2 = & 11 \\ 1101_2 = & 13 \\ 111_2 = & 7 \\ \hline & 31 \end{array} \qquad 11111_2 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$$

Ejemplo. Calcular $10111 - 1101 - 1001$, todos ellos números en binario. Comprobar el resultado convirtiendo todos los números al sistema en base diez.

Tenemos:

$$\begin{array}{r} 10111 \\ -\;1101 \\ \hline 1010 \\ -\;1001 \\ \hline 1 \end{array}$$

es decir,

$$10111_2 - 1101_2 - 1001_2 = 1 \text{ (en sistema binario)}$$

[Comprobemos: $10111_2 - 1101_2 - 1001_2 = 23 - 13 - 9 = 1$

$$1_2 = 1$$

lo cual concuerda.]

EJERCICIO 4.2

1. Convertir los siguientes números dados en base diez a base dos: *a*) 12; *b*) 23; *c*) 72; *d*) 191; *e*) 947; *f*) 3054; *g*) 7^4.

2. Convertir los siguientes números binarios a base diez: *a*) 111; *b*) 1010; *c*) 1111; *d*) 11010; *e*) 101101; *f*) 10110111; *g*) 11100100; *h*) 1011100101.

3. Realizar las siguientes operaciones, estando todos los números en base dos:

a) 101 + 111; *b*) 1011 + 1101;
c) 111 + 1101; *d*) 101011 + 110010;
e) 1011 + 10111 + 1101; *f*) 11010111 + 10111101.

4. Restar 101111_2 de 111011_2.

5. Calcular, sabiendo que todos los números están en el sistema binario:

a) 1001 − 101 + 11; *b*) 10110 + 101 − 11000;
c) 11011 − 110011 + 10111 + 1; *d*) 110111 − (10110 + 10011)

6. Pasar todos los números de las cuestiones 3, 4 y 5 a base diez y comprobar así el resultado obtenido anteriormente.

Ejemplo. En el sistema binario, multiplicar 111 por 101. Tenemos:

```
   111
   111 ×
  ------
   111
  111
  ------
100011
```

$$110 \times 101 = 100011 \text{ (base dos)}$$

Ejemplo. Multiplicar 101101_2 por 11011_2. Tenemos:

```
     101101
      11011 ×
 -----------
     101101
    101101
  101101
 101101
 -----------
 10010111111
```

(base dos)

Ejemplo. Dividir 110000111 entre 10001, en base dos. Convertir los números a base diez y comprobar el resultado haciendo la división en este sistema:

```
10001)110000111(1011  (base dos)
      10001
      -----
        11101
        10001
        -----
         11001
         10001
         -----
          10001
          10001
          -----
          .....
```

[Comprobación: $110000111_2 = 1 + 2 + 4 + 128 + 256 = 391$

$$10001_2 = 1 + 16 = 17$$

```
391 |17
051  23
 00
```

Finalmente: $10111_2 = 1 + 2 + 4 + 16 = 23$.]

Ejemplo. Resolver en el sistema binario la ecuación:

$$111x + 1010 = 101101$$

Tenemos:

$$111x = 101101 - 1010 = $$
$$= 100011$$

$$x = \frac{100011}{111}$$

$$x = 101 \text{ (en base dos)}$$

```
  101101
-   1010
--------
111)100011 (101
    111
    ---
      111
      111
      ---
      ...
```

EJERCICIO 4.3

1. En el sistema binario, calcular:

a) 101 × 111; *b*) 11 × 1011
c) 110 × 1101; *d*) 10110 × 1101;
e) 1111 × 111; *f*) 10111 × 110110.

2. Calcular, en base dos:

a) 1100 ÷ 10; *b*) 10101 ÷ 11;
c) 1101001 ÷ 101.

3. Resolver, en base dos, las siguientes ecuaciones:

a) $11x = 101$; *b*) $1011x = 110111$;
c) $111x + 1001 = 11110$.

4. Resolver, en base dos, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$101x - 10y = 1000$$

$$11x + 1000y = 1010$$

[*Sugerencia:* Multiplicar la primera ecuación por 10 y sumarle la segunda.]

5. Pasar los siguientes números binarios a base diez:

a) 101011; *b*) 1110010110;
c) 11011001001101.

6. Calcular, en base dos:

a) 10110 + 100101 + 11101;
b) 110000101 − 101111111;
c) 11011 − 111011 + 110111.

7. Calcular:

a) $\dfrac{11100 \times 1111}{1100}$; *b*) $\dfrac{11110 \times 101101}{11001}$.

8. Dividir en base dos:

a) 1000010 entre 1011;
b) 101101001 entre 10011;
c) 10000110001 entre 11101.

9. Calcular $\sqrt{101101001_2}$. [*Sugerencia:* Considerar la cuestión 8.*b*) precedente, o pasar a base diez, calcular la raíz cuadrada y convertir el resultado de nuevo a base dos.]

10. Comprobar el resultado de las cuestiones 3, 4, 6 y 8 convirtiendo previamente los números a base 10 y efectuando luego la operación indicada.

4.4. Fracciones binarias

Ya estamos familiarizados con la coma decimal. Por ejemplo, el número 3,1 significa 3 + 1/10 y 0,1 es 1/10. De la misma forma, 4,55 significa 4 + 55/100, que puede simplificarse como 4 + 11/20.

En el sistema binario, $0{,}1_2$ debería significar 1/2. Es claro si tenemos 11_2; el 1 situado en la columna de «las unidades» tiene la mitad de valor que el que está situado en la columna de peso «dos» (así, 11 = 2 + 1).

Por tanto, 11,1 debe significar 2 + 1 + 1/2 = 3 + 1/2, y de la misma forma, 101,1 = 4 + 0 + 1 + 1/2 = 5 + 1/2.

¿Cómo podemos extender este resultado a $0{,}01_2$? Si reflexionamos un momento veremos que $0{,}01_2$ sugiere la mitad de $0{,}1_2$ y, por tanto, $0{,}01_2 = 1/4$ (en base diez).

El sistema binario completo es, por tanto,

2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
cuatro	dos	uno	medio	cuarto

(Nótese que $2^{-1} = 1/2$, $2^{-2} = 1/4$, y así sucesivamente.)

Cualquier número binario no entero puede expresarse como una fracción en base diez o un número decimal normal.

Ejemplo. Expresar $101{,}1101_2$ en base diez: *a*) como una fracción mixta, y *b*) en forma decimal.

Tenemos:

$$101{,}1101_2 = 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 5\frac{13}{16}\ \text{(fracción mixta)} =$$
$$= 5{,}8125\ \text{(número decimal)}$$

Veamos ahora cómo podemos pasar a base diez un número en base dos entero y periódico. En principio, es necesario pensar un poco el significado que se le ha dado a los números decimales periódicos o recurrentes.

Tenemos que 0,9999... = 1, porque continuando hacia la derecha nos aproximamos al 1 tanto como queramos. Por tanto, 0,9 = = 1. Así,

$$0{,}1 = \frac{0{,}1111...}{1} = \frac{0{,}111...}{0{,}999...} = \frac{11...}{99...} = \frac{1}{9}$$

porque el numerador es la novena parte del denominador. De la misma forma tenemos:

$$0{,}\dot{2} = \frac{2}{9} \quad ; \quad 0{,}\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \text{etc.}$$

Podemos extender esta idea a

$$0{,}\dot{2}\dot{4} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33} \quad ; \quad 0{,}\dot{2}7\dot{9} = \frac{279}{999} = \frac{31}{111}$$

Esto nos da una pista para resolver nuestro problema:

$$0{,}\dot{1}_2 = 0{,}1111\ldots = 1 \text{ (base dos)} = 1 \text{ (base 10)}$$

$$0{,}\dot{0}\dot{1}_2 = \frac{1}{11} \text{ (base dos)} = \frac{1}{3} \text{ (base diez)}$$

$$0{,}\dot{1}1\dot{0}_2 = \frac{110}{111} \text{ (base dos)} = \frac{6}{7} \text{ (base 10)}$$

Ejemplo. Expresar $0{,}0\dot{1}0\dot{1}_2$ como fracción: *a*) en base dos, y *b*) en base diez.

Primeramente observamos que el primer cero no se repite. El número binario es 0,0101101101...

Generalizando lo visto anteriormente, $0{,}\dot{1}0\dot{1}_2$ (en base 2) y para desplazar el punto un lugar hacia la izquierda hemos de dividir por 2 (en base diez), es decir, por 10 (en base dos):

$$\Rightarrow 0{,}0\dot{1}0\dot{1}_2 = \frac{1}{10} \times \frac{101}{111} = \frac{101}{1110} \text{ (base dos)} = \frac{5}{14} \text{ (base diez)}$$

EJERCICIO 4.4

1. Escribir los números siguientes: 1) como fracciones mixtas en base diez, y 2) en forma decimal:

a) 0,11; *b*) 0,101; *c*) 0,10011; *d*) 101,01;
e) 110,1101; *f*) $0{,}0\dot{1}$; *g*) $1001{,}\dot{1}\dot{0}$; *h*) $0{,}0\dot{0}\dot{1}$;
i) $0{,}\dot{0}1\dot{1}$; *j*) $0{,}\dot{1}00\dot{1}$.

La conversión de fracciones en base diez a números binarios no enteros, requiere un poco más de cuidado, ya que a menudo estos últimos son periódicos. Hemos visto que $1/2 = 0{,}1$ y que $1/4 = 0{,}01$, pero $1/3$ y $1/5$ requieren una mayor reflexión.

Empezaremos convirtiendo $1/5$ a base dos:

$$5 = 101 \quad , \quad \text{luego} \quad \frac{1}{5} = \frac{1}{101} \quad \text{(base dos)}$$

haciendo una división larga en base dos.

Tenemos:

```
101)1,0000000(0,00110011...
      101
      ---
       110
       101
       ---
         1000
          101
          ---
           110
           101
           ---   etc.
```

Luego $1/5 = 0{,}\dot{0}01\dot{1}$ (base dos).

[Puede observarse que, en binario, $15 = 1111_2$ y, por tanto,

$$\frac{1}{5} = \frac{3}{15} = \frac{11}{1111} \text{ (base dos)} = 0{,}\dot{0}001\dot{1}.]$$

En la tabla 4.1 se recogen algunos resultados más.

Fracción en base diez	Binario no entero	Fracción en base diez	Binario
$\frac{1}{3}$	$0{,}\dot{0}\dot{1}$	$\frac{1}{5}$	$0{,}\dot{0}01\dot{1}$
$\frac{1}{7}$	$0{,}\dot{0}0\dot{1}$	$\frac{1}{9}$	$0{,}\dot{0}0011\dot{1}$
$\frac{1}{15}$	$0{,}\dot{0}00\dot{1}$	$\frac{1}{17}$	$0{,}\dot{0}000111\dot{1}$

Fácilmente puede extenderse este resultado; por ejemplo:

$$\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} \Rightarrow 11 \times 0{,}\dot{0}0\dot{1}_2 = 0{,}\dot{0}1\dot{1}_2$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \Rightarrow 0{,}1 \times 0{,}\dot{0}\dot{1} = 0{,}0\dot{0}\dot{1}_2$$

(Nótese que $0{,}0\dot{0}\dot{1}_2 = 0{,}0010101...$ y el primer cero no se repite.)

El paso de números decimales a números en binario no enteros está naturalmente relacionado con el paso de números enteros en base diez a números enteros en base dos, aunque existe una diferencia esencial. Al convertir números decimales enteros al sistema binario, como hacíamos anteriormente en este capítulo, dividíamos[1] por 2 repetidas veces, pero al convertir números decimales en números en binario que no son enteros, multiplicamos repetidas veces por 2. El ejemplo siguiente puede ilustrar el procedimiento.

Ejemplo. Convertir 0,59375 en un número binario no entero.

El resultado puede leerse hacia abajo en la columna de la izquierda.

0	0,59375 × 2
1	0,1875
0	0,375
0	0,75
1	0,5
1	0,0

$$0{,}59375 = 0{,}10011_2$$

El resultado ha sido un número con un número finito de cifras, pero podría no haber sido así.

[1] Página 71.

Ejemplo. Expresar 0,7 como número en base dos no entero.

0	0,7 × 2
1	0,4
0	0,8
1	0,6
1	0,2
0	0,4
0	0,8
1	0,6
1	0,2
0	0,4

Se repite sucesivamente.

Por tanto, $0{,}7 = 0{,}1\dot{0}11\dot{0}$, donde el primer 1 a partir del punto no se repite periódicamente (en los cálculos 1,4 —segunda línea— y 0,4 —en la sexta línea— no son iguales).

Ejercicio 4.5

1. Convertir estas fracciones en números binarios no enteros, aplicando, en cada caso, el procedimiento adecuado:

a) 3/8; *b*) 11/16; *c*) 2/7;
d) 5/9; *e*) 14/15; *f*) 7/12.

2. Convertir los siguientes números decimales en números en base dos, no enteros:

a) 0,625; *b*) 0,4376; *c*) 0,15625; *d*) 0,171875.

3. Convertir los siguientes números decimales en números en base dos, no enteros:

a) 0,8; *b*) 0,6; *c*) 0,9; *d*) 0,85;
e) 0,6; *f*) 0,8; *g*) 0,93.

En la práctica pueden usarse otros métodos para llegar a números en base dos que no sean enteros, pero los explicados anteriormente son muy adecuados para entender los principios básicos.

4.5. Sistema octal

Evidentemente, resulta tedioso repetir muchas operaciones en las que es necesario multiplicar o dividir por 2. El sistema octal (base ocho) ofrece varias simplificaciones. Primero se convierte un número del sistema en base diez, en otro en el sistema octal, para luego llevarlo fácilmente al sistema binario.

En el sistema octal usamos los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Como $7_8 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$, se tiene: $7_8 = 111_2$. Obsérvese, sin embargo, que hasta el 7 el sistema en base diez coincide con el sistema octal.

Base diez u octal	1	2	3	4	5	6	7
Binario	001	010	011	100	101	110	111

En la tabla precedente se han colocado ceros donde aparentemente no eran necesarios, es decir, a la izquierda en los números 1, 2 y 3 (base diez), usando, así, tres dígitos en binario, por una razón que se explicará rápidamente.

El procedimiento se ilustrará con un ejemplo.

Ejemplo. Convertir 3407 en su equivalente en binario:

$$
\begin{array}{l}
8)\,\underline{3407} \\
8)\,\underline{425} + 7 \\
8)\,\underline{\ \ 53} + 1 \\
8)\ \ \ \ 6 + 5
\end{array}
$$

Leyendo según la dirección indicada por la flecha:

$$3407 = 6517_8$$

El resultado se leería: $6 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 7$, y puede ser descompuesto de la siguiente forma:

6			5			1			7		
4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

y puede ponerse en binario:

$$3407 = 6517_8 = 110101001111_2$$

Nota. No podemos proceder directamente así, desde el número en base diez hasta el número en base dos, porque los números 8 y 9 presentes en el sistema decimal se transformarían en 1000 y 1001, respectivamente. Esto requeriría cuatro dígitos y el método ya no sería válido.

EJERCICIO 4.6

1. Pasar los siguientes números en base diez a base ocho:

a) 79; *b*) 148; *c*) 476; *d*) 3918;
e) 10725; *f*) 24938; *g*) 799224.

2. Convertir los números siguientes al sistema binario:

a) 46_8; *b*) 74_8; *c*) 423_8; *d*) 576_8;
e 3040_8; *f*) 6732_8; *g*) 20723_8.

3. Convertir los números siguientes al sistema binario, haciéndolo, como paso intermedio, al sistema octal, tal y como se hizo en el último apartado:

a) 218; *b*) 1309; *c*) 2790; *d*) 4683;
e) 8117; *f*) 8496.

4. Pasar los números siguientes al sistema de base dos:

a) 431_8; *b*) 432_6; *c*) 101101_2;
d) 211012_3; *e*) 7185_9; *f*) 40231_5.

5. Pasar los siguientes números, dados en base diez, a la base indicada:

a) 237 a base ocho; *b*) 1465 a base cinco;
c) 1932 a base nueve; *d*) 6160 a base cuatro.

6. Elaborar una tabla de multiplicar en base ocho, de la misma forma que se hizo para base seis en la página 69. Usando la tabla, calcular:

a) 35×14; *b*) 42×31; *c*) 102×45;
d) $44 \div 6$; *e*) $61 \div 7$; *f*) $526 \div 6$.

7. Calcular en la base indicada:

a) $215 + 372 - 134$ (base ocho);
b) $2101 - 1022$ (base tres);
c) $4152 - 3125 + 1034$ (base seis).

8. Encontrar el número decimal para:

a) 0,1001 (base dos); *b*) $0{,}\dot{1}\dot{0}$ (base dos);
c) 0,1 (base tres); *d*) 0,11 (base tres);
e) $0{,}\dot{1}0\dot{2}$ (base tres); *f*) 0,54 (base ocho);
g) $0{,}\dot{6}\dot{1}$ (base ocho).

5 Aritmética modular

5.1. Sistemas de módulo

Supóngase algo tan cotidiano como la medida del tiempo. Un reloj tradicional después de 12 horas comienza a contar de nuevo. Si, por ejemplo, la manecilla pequeña comienza su recorrido en las 12 y pasan 15 horas, acabará en las 3. Como puede verse, ha desaparecido el múltiplo de 12 y sólo permanece el resto, así:

$$15 = 1 \cdot 12 + 3$$

El mismo resultado obtendríamos si se diera más de una vuelta, así:

$$39 = 3 \cdot 12 + 3$$

y podemos poner:

$$39 \equiv 3 \pmod{12}$$

que se lee «39 es congruente con 3, módulo 12».

En general, dos números son congruentes en cierto módulo si, después de eliminar el mayor múltiplo del módulo posible, el resto es igual en ambos. Solamente se usan números enteros en este proceso, como resultado de los trabajos de Karl Friedrich Gauss (1777-1855), que publicó sus estudios sobre la teoría de los números en *Disquisitiones Arithmeticae* (1801).

Evidentemente, el resto debe ser cero o un número positivo menor que el módulo. Así, si trabajamos en módulo 7, el resto será 0, 1, 2, 3, 4, 5 ó 6. De forma más general, para módulo n, el resto será 0, 1, 2, ..., $(n - 2)$ ó $(n - 1)$.

Examinemos los restos cuando todos los números enteros, incluido el cero, se dividen por 4. Como restos se repetirán los números 0, 1, 2, 3, una y otra vez.

....	$0 = 0 \cdot 4 + 0$	$6 = 1 \cdot 4 + 2$
$-5 = -2 \cdot 4 + 3$	$1 = 0 \cdot 4 + 1$	$7 = 1 \cdot 4 + 3$
$-4 = -1 \cdot 4 + 0$	$2 = 0 \cdot 4 + 2$	$8 = 2 \cdot 4 + 0$
$-3 = -1 \cdot 4 + 1$	$3 = 0 \cdot 4 + 3$	$9 = 2 \cdot 4 + 1$
$-2 = -1 \cdot 4 + 2$	$4 = 1 \cdot 4 + 0$	$10 = 2 \cdot 4 + 2$
$-1 = -1 \cdot 4 + 3$	$5 = 1 \cdot 4 + 1$	....

De la tabla anterior se obtiene que:

$$-5 \equiv -1 \equiv 7 \equiv 3 \pmod{4}$$

Supóngase ahora que realizamos una simple suma en el sistema de módulo 4:

$$7 + 8 + 10 = 25 \equiv 1 \pmod{4}$$

y usando la tabla anterior:

$$7 + 8 + 10 \equiv 3 + 0 + 2 = 5 \equiv 1 \pmod{4}$$

Este método puede ahorrar algunas operaciones en el caso de números grandes. Se divide mentalmente cada número por 4 (o el módulo que estamos usando), se sustituye cada número por su resto y se suman los restos. Después, el resultado se normaliza también, si es necesario.

Ejemplo. Calcular el resto de

$$317 + 584 - 2.193 \pmod{5}$$

Se divide mentalmente cada número por 5, y se tiene:

$$317 + 584 - 2.193 \equiv 2 + 4 - 3 \equiv 3 \pmod{5}$$

(Lo que se ha hecho es: $317 \div 5 =$ «algo» + resto 2, donde no importa lo que se ha llamado «algo». Es decir:

$$317 \div 5 = 63 \cdot 5 + 2.)$$

Creemos interesante dar aquí dos tablas para operaciones en módulo 4.

a) Tabla de la suma:

+	1	2	3	4 ....
1	2	3	0	1
2	3	0	[1]	2
3	0	1	2	3
4	1	2	3	0
⋮				

De esta tabla se obtiene, por ejemplo, $3 + 2 \equiv 1$ (mód 4).

b) Tabla para la multiplicación:

×	1	2	3	4 ....
1	1	2	3	0
2	2	0	2	0
3	3	[2]	1	0
4	0	0	0	0
⋮				

De la tabla anterior se deduce, por ejemplo, que

$$2 \times 3 \equiv 2 \pmod{4}$$

Ejemplo. Obtener el resto de 21×39 (mód 4). Tenemos que

$$21 \times 39 = 819 \equiv 3 \pmod{4}$$

Podemos usar, también, el procedimiento más corto que usábamos en la suma y en la resta:

$$21 \times 39 \equiv 1 \times 3 \equiv 3 \pmod{4}$$

Esta afirmación no es, en absoluto, evidente, y aquí se expone la demostración para aquellos que estén interesados. El lector que lo desee puede omitir su lectura, sin que ello suponga ningún obstáculo.

Teorema. Si $p \equiv a$ y $q \equiv b$ (mód n), entonces $pq \equiv ab$ (mód n).

Demostración:

Si $p \equiv a$ (mód n), entonces $p = xn + a$.

Si $q \equiv b$ (mód n), entonces $q = yn + b$

(todas las letras representan números enteros).

Así,

$$pq = (xn + a) \cdot (yn + b) = xyn^2 + ayn + bxn + ab =$$

$$= n(xyn + ay + bx) + ab = ab \text{ (mód } n)$$

ya que $n(xyn + ay + bx)$ es otro número entero.

Ejemplo. Construir la tabla para la multiplicación por 7 en el sistema de módulo 5. Tenemos:

$1 \times 7 \equiv 2$	$4 \times 7 \equiv 3$	$7 \times 7 \equiv 4$
$2 \times 7 \equiv 4$	$5 \times 7 \equiv 0$	etc.
$3 \times 7 \equiv 1$	$6 \times 7 \equiv 2$	módulo 5

Existe el peligro de intentar descartar las tablas de multiplicar que tradicionalmente se estudian en las escuelas. Esto sería un grave error, ya que con este trabajo sólo se pretende dar un procedimiento rápido de multiplicación y suma de números en base diez, aunque el resultado no esté expresado necesariamente en este sistema.

Ejemplo. Encontrar qué números son congruentes entre los siguientes (mód 7): *a*) 213; *b*) 459; *e*) 605.

Tenemos:

$$213 = 30 \cdot 7 + 3 \equiv 3 \text{ (mód } 7)$$

$$459 = 65 \cdot 7 + 4 \equiv 4 \text{ (mód } 7)$$

$$605 = 86 \cdot 7 + 3 \equiv 3 \text{ (mód } 7)$$

Luego

$$213 \equiv 605 \text{ (mód } 7)$$

EJERCICIO 5.1

1. Escribir las tablas de la multiplicación y la suma para los números 1, 2, 3, 4, 5 en módulo 6.

2. Escribir la tabla de la multiplicación del 7 en: *a*) módulo 8, y *b*) módulo 10.

3. Demostrar que:

a) $316 \equiv 7240 \pmod{6}$, y *b*) $-500 \equiv 900 \pmod{7}$.

4. Encontrar el número positivo entero (o cero) más pequeño que resulte congruente con un número dado en una base dada en los ejemplos siguientes:

a) 2.158 (mód 5);
b) 32.774 (mód 17);
c) -5 (mód 9);
d) -394 (mód 6);
e) $16 + 9 - 14 - 20$ (mód 3);
f) $372 - 425$ (mód 7);
g) 34×62 (mód 5);
h) 694×217 (mód 6);
i) 694×217 (mód 7);
j) -61×38 (mód 11).

5.2. Congruencias algebraicas

Los métodos usados anteriormente pueden aplicarse en algunos importantes teoremas de la aritmética, pero eso está más allá de las pretensiones de este libro. Sin embargo, se pueden resolver fácilmente cierto tipo de problemas algebraicos.

Ejemplo. Resolver, en enteros, la congruencia

$$2x + 1 \equiv 4 \pmod{5}$$

Tenemos:

$$2x \equiv 3 \pmod{5}$$

Multiplicando ambos miembros por 3:

$$6x \equiv 9 \pmod{5}$$

Ahora el lado izquierdo es $5x + x$, pero $5x \equiv 0 \pmod{5}$, porque cinco veces cualquier entero es exactamente divisible por 5 y deja de resto 0:

$$5x + x \equiv x \pmod{5}$$

Por tanto,

$$x = 9 \equiv 4 \pmod{5}$$

y la solución completa será:

$$x = 5n + 4$$

donde n es cualquier entero (positivo, negativo o cero).

Compruebe que

$$2x + 1 = 10n + 8 + 1 = 10n + 9 = 9 \equiv 4 \pmod{5}$$

EJERCICIO 5.2

Solucione las siguientes congruencias, cuestiones 1 a 4, dando la solución general en enteros:

1. $x + 3 \equiv 0 \pmod{4}$

2. $2x - 1 \equiv 5 \pmod{7}$

3. $5x + 6 \equiv 0 \pmod{8}$. [*Sugerencia:* Sustituya 0 por 8, ya que $8 \equiv 0 \pmod{8}$.]

4. $6x + 4 \equiv 2x - 3 \pmod{5}$.

5. Encuentre los tres enteros positivos más pequeños congruentes con 6, módulo 17.

6. ¿Por qué no existe una solución en enteros para la congruencia $3x \equiv 1 \pmod{6}$?

[*Sugerencia:* Esto se verá si dibujamos parte de la tabla de multiplicación para 3, módulo 6.

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	0
2	2	4	0	2	4	0
→3	3	0	3	0	3	0

Ningún número multiplicado por 3 es congruente con 1 (mód 6) en la tabla. De hecho, $3x$ solamente puede ser congruente con 0 y 3 para este módulo, para $3 \cdot 1 \equiv 3$, $3 \cdot 2 \equiv 0$, $3 \cdot 3 \equiv 3$, $3 \cdot 4 \equiv 0$, $3 \cdot 5 \equiv 3$, ... (mód 6).]

7. ¿Existe solución en enteros para $4x + 1 \equiv 7$ (mód 5)? Si la hay, encuéntrela. Si no, explique por qué no existe.

5.3. Prueba de factores de números enteros

Damos a continuación una serie de pruebas, junto con demostraciones que son todas válidas. Algunas son bien conocidas y fácilmente demostrables, pero otras son de interés en la aplicación de los métodos relacionados con las secciones precedentes de este capítulo. Todas juntas, las pruebas, son suficientes para encontrar todos los factores desde el 2 al 16 de cualquier número entero. El primer factor, por tanto, para el que no se da ninguna prueba, es el 17. La prueba de divisibilidad por 7, 11 ó 13 es de poco interés, a menos que el número en consideración sea grande. Agruparemos las pruebas por conveniencias de demostración.

Usaremos la abreviatura «div» por «es divisible por» (abreviatura no estándar), y adoptaremos la X como el entero objeto de estudio. También introduciremos el símbolo «⇔», que significa «implica y es implicado por» o «si y sólo si».

a) X div 2, 4, 8, 16.

El número X es divisible por 2, 4, 8, 16 si el número formado por los últimos uno, dos, tres, cuatro dígitos de X es divisible por 2, 4, 8, 16, respectivamente.

Consideremos el número 213.648. Aquí se verifica

$$X = 213.648 = 213 \times 1.000 + 648$$

Ahora bien, 1.000 div 8 (ya que 1.000 = 8 × 125). Así,

$$X \text{ div } 8 \Leftrightarrow 648 \text{ div } 8$$

pero 648 = 8 × 81, luego X div 8.

La demostración general es igualmente simple. Tomaremos el caso de la división por 4, ya que por 2, 8, 16, son probados exactamente igual (siendo 16. sin embargo, raramente usado).

Cualquier número $X = A \cdot 100 + B$, donde A y B son cualesquiera enteros, y B es, además, menor que 100:

$$X \text{ div } 4 \Leftrightarrow B \text{ div } 4 \quad (\text{ya que } 100 \text{ div } 4)$$

De forma más general, $X \equiv B$ (mód 4) es interesante de ver.

Ejemplo. ¿Es 43.729.536 divisible por 8?

$$536 \text{ div } 8 \quad (\text{ya que } 536 : 8 = 67)$$

luego 43.729.536 div 8.

b) X div 3 ó 9.

$$X = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n$$

donde[1] todo $a \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, para $r = 0, 1, ..., n$.

[Realmente X aparecería como $a_n, a_n - 1, a_n - 2, ..., a_3, a_2, a_1, a_0$. Por ejemplo, $X = 21.468$ tiene $a_0 = 8, a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 2$.]

Sea $P = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$:

$$X - P = 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \cdots + 99...9a_n = 9k$$

(donde k es un número entero).

[1] Está explicado completamente en las páginas 96-98. Alternativamente, podemos decir que todo a_r es un número entero y positivo menor o igual que 9, o es cero para cualquier valor de r de 0 a n.

Si $P \text{ div } 3$,

$$P = 3q \quad (q \text{ entero})$$

$$X = 3q + 9k = 3(q + 3k) \Rightarrow X \text{ div } 3$$

De la misma forma, si $P \text{ div } 9$,

$$P = 9r \quad (r \text{ entero})$$

$$X = 9r + 9k = 9(r + k)$$

$$\Rightarrow X \text{ div } 9$$

[*Nota:* Podemos demostrar esta segunda parte usando el concepto de congruencia. Así:

$$X - P = 9k \quad (k \text{ entero})$$

$$X - P \equiv 0 \,(\text{mod } 3) \quad \text{y} \quad X - P \equiv 0 \,(\text{mód } 9)$$

$$X \text{ div } 3 \Leftrightarrow P \text{ div } 3 \quad \text{y} \quad X \text{ div } 9 \Leftrightarrow P \text{ div } 9.]$$

Por tanto, podemos enunciar el siguiente teorema: un número entero X es divisible por 3 o por 9 si la suma de sus dígitos es divisible por 3 o por 9, respectivamente.

Ejemplo. ¿Es 45.738 divisible por 3 o por 9? Tenemos:

$$4 + 5 + 7 + 3 + 8 = 27$$

$$27 \div 9 = 3$$

45.738 es divisible por 9 (y, por tanto, por 3).

c) X div 6 o div 12:

$$X \text{ div } 6 \;\text{ si } \;\text{div } 2 \;\text{ y } \;\text{div } 3$$

$$X \text{ div } 12 \;\text{ si } \;\text{div } 4 \;\text{ y } \;\text{div } 3$$

Ejemplo. ¿Es 28.614 divisible por 6 o por 12?

$$2 + 8 + 6 + 1 + 4 = 21 \;(\text{div } 3)$$

y también es divisible por 2, pero 14 ÷ 4 no es entero, luego 28.614 div 6, pero no div 12.

d) X div 5 o div 10.
De nuevo,

$$X = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n$$
$$X = a_0 + 10m \quad (\text{donde } m \text{ es entero})$$

Si a_0 div 5, $a_0 = 5s$ (s entero):

$$X = 5(9 + 2m) \Rightarrow X \text{ div } 5$$

Si $a_0 = 0$, $X = 10m$:

$$X \text{ div } 10$$

Por tanto, podemos enunciar el siguiente teorema: un número es divisible por 5 o por 10 si acaba en 5 o en 0, respectivamente.

e) X div 15.

$$X \text{ div } 15 \quad \text{si} \quad \text{div } 3 \text{ y div } 5$$

Ejemplo. ¿Es 24.735 div 15?

$$X = 24.735 \text{ div } 5 \quad (\text{por terminar en } 5)$$

Además,

$$2 + 4 + 7 + 3 + 5 = 21 \quad (\text{div } 3)$$

Luego 24.735 es divisible por 15.

f) X div 7, 11, 13.

Este caso es más sutil[2] y su demostración requiere mayor apreciación.

---

[2] Algunos lectores pueden preferir omitir la demostración y leer sólo las primeras líneas. La aplicación de este punto puede encontrarse en el ejemplo que sigue.

Podemos escribir:

$$X = p_0 + p_1 \cdot 10^3 + p_2 \cdot 10^6 + p_3 \cdot 10^9 + \cdots + p_n \cdot 10^{3n}$$

donde $p_0, p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ tienen tres dígitos (o cero) y p_n tiene tres dígitos o menos.

(Por ejemplo:

$$4.729.080.642 = 642 + 80 \cdot 10^3 + 729 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^9$$

No tenemos que escribir $080 \cdot 10^3$.)

Sea

$$Y = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + \cdots + (-1)^n p_n$$

$$X - Y = p_1(10^3 + 1) + p_2(10^6 - 1) +$$

$$+ p_3(10^9 + 1) + \cdots + p_n(10^{3n} + [-1]^n)$$

Ahora, aplicando el álgebra elemental los factores

$$10^3 + 1 \ , \ 10^6 - 1 \ , \ 10^9 + 1, ..., 10^{3n} + (-1)^n$$

situados a la derecha, tienen como factor común a $10^3 + 1$.

Pero $10^3 + 1 = 1.001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$:

$$X - Y = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot z \quad \text{(donde } z \text{ es entero)}$$

$$X \text{ div } 7,\ 11,\ 13 \Leftrightarrow Y \text{ div } 7,\ 11,\ 13$$

[Alternativamente podemos decir $X \equiv Y$ (mód 7, 11, 13). Luego si $Y \equiv 0$, entonces $X \equiv 0$ (mód 7, 11, 13).]

Aclararemos esto viendo un caso particular.

Supóngase $Y = 7u$, donde u es un entero. Entonces:

$$X = 7u + 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot z = 7(u + 11 \cdot 13 \cdot z)$$

$$Y \text{ div } 7 \Rightarrow X \text{ div } 7$$

Ejemplo. Encontrar si 7, 11 ó 13 son factores de 385.086.481. Aquí, $p_0 = 481$, $p_1 = 86$, $p_2 = 385$. Por tanto:

$$Y = p_0 - p_1 + p_2 = 481 - 86 + 385 = 780$$

múltiplo de 13, pero no de 7 y 11.

Luego 385.086.481 es divisible por 13, pero no por 7 ni por 11.

g) X div 14.

$$X \text{ div } 14 \text{ si es par y div } 7$$

Ejemplo. Encontrar si 14 es un factor de 3.250.044. Aquí, $p_0 = 44$, $p_1 = 250$, $p_2 = 3$:

$$Y = p_0 - p_1 + p_2 = 44 - 250 + 3 = -203, \text{ div } 7$$

Pero 3.250.044 es par y divisible por 7, luego lo es por 14.

EJERCICIO 5.3

1. Encontrar todos los factores de los siguientes números: *a*) 60; *b*) 84; *c*) 1.385.

2. Descomponer en factores primos (esto es, en factores que son números primos): *a*) 1.170; *b*) 2.431; *c*) 37.041.

3. Encontrar cuáles de los siguientes números son divisibles por 15: *a*) 27.295; *b*) 38.415; *c*) 263.570; *d*) 10.914.

4. Encontrar qué números de los siguientes son divisibles por 7, 11 ó 13: *a*) 216.425; *b*) 81.292.315; *c*) 513.480.467.

5. Encontrar los factores menores de 16, de 14.730.765.

6. Encontrar los factores, menores de 16, de 292.564.187.097.

7. Demostrar que 20.746.864 = 138 (mód 11, 13, 14).

[*Sugerencia:* No es necesario desarrollar el trabajo completamente. Nótese que ambos son números pares.]

6 Introducción a los conjuntos

6.1. Conjuntos

Un conjunto es una colección de cosas consideradas juntas de alguna forma. Podemos tener un conjunto de naipes, un conjunto de cuchillos, tenedores o cucharas, e incluso un conjunto de niños en la escuela. El lector recordará que, en el capítulo 1, estudiamos la recta real, y decíamos que podía considerarse formada por todos los números reales. En este sentido, la recta real puede considerarse como un conjunto de puntos, cada uno de los cuales representa un número real. De forma más general, cada línea puede considerarse como un conjunto de puntos.

Una cubertería puede estar formada por:

6 cuchillos	6 cucharas de postre
6 tenedores de mesa	2 cucharas de mesa
6 tenedores de postre	6 cucharillas

En total tenemos 32 piezas que constituyen el conjunto de toda la cubertería. Si bien es cierto que podríamos distinguir fácilmente entre un tenedor de mesa y otro de postre, sería difícil distinguir entre dos tenedores de postre.

En matemáticas, para hablar de un conjunto propiamente dicho, normalmente necesitamos que cada elemento pueda distinguirse de los demás. Una baraja de 52 naipes cumpliría esta condición y también un grupo de niños en la escuela, pero la cubertería mencionada antes no lo cumpliría, a menos que cada

pieza fuera marcada especialmente. Existen, sin embargo, situaciones en las que esta dificultad puede evitarse.

La representación de un conjunto se hace entre dos *llaves* $\{\}$. No usaremos para este propósito los paréntesis. Por ejemplo, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ es el conjunto de los números naturales menores que 10. Se dice que cada número es un elemento del conjunto.

Podemos usar una notación ligeramente distinta. Así:

$$\{d : d \text{ es un naipe}\}$$

que se lee: «el conjunto de todas las cosas d, tal que d sea un naipe». Algunas veces esto se escribe $\{d \mid d \text{ es un naipe}\}$, donde los símbolos (:) o (|) se leen «tal que» en cualquier caso, pero solamente si van entre llaves. En otro caso, los dos puntos es solamente un signo de escritura o el símbolo de dividir ($2:3 = 2/3$).

6.2. Subconjuntos

Todos los conjuntos tienen subconjuntos. Un subconjunto consiste en ninguno, algunos o todos los elementos de un conjunto. Esto incluye al conjunto en sí mismo y al conjunto vacío. Supóngase el conjunto

$$X = \{\text{Juan, Enrique, Mary, Ana}\}$$

Como ejemplos de subconjuntos tenemos {Juan, Mary}, {Enrique, Ana, Mary} y, por supuesto, {Juan, Enrique, Mary, Ana}.

Se usan letras mayúsculas para nombrar a los conjuntos, y el símbolo $\in$ para indicar «pertenece a». En el conjunto anterior, $\text{Ana} \in X$, y se lee «Ana pertenece a X»; también {Ana} es un subconjunto de X.

El conjunto vacío es un conjunto sin ningún elemento, y se denota por ϕ. Los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ son

$$\phi,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}$$

es decir, hay ocho subconjuntos, esto es, 2^3, y podemos preguntarnos si hay algún significado especial en el hecho de ser potencia de 2. Esto puede verse fácilmente.

Supóngase que tenemos un conjunto con n elementos. En un subconjunto podemos aceptar o rechazar un elemento. El número total de formas de hacer esto es $2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (n veces), es decir, 2^n. Luego hay 2^n subconjuntos en un conjunto de n elementos.

El lector puede ver esto más claro si aplica este principio en detalle a nuestro ejemplo anterior $\{1, 2, 3\}$:

$$\{.,.,.\}, \{.,1,.\}, \{.,2,.\}, \{.,.,3\}$$

$$\{1,2,.\}, \{1,.,3\}, \{.,2,3\}, \{1,2,3\}$$

Los puntos indican que hemos rechazado el elemento sustituido.

Así como el símbolo $\in$ significa «pertenece a», el símbolo $\notin$ significa «no pertenece a». Por ejemplo, si

$$A = \{\text{cuadrúpedos}\}$$

entonces, caballo $\in A$; gallina $\notin A$; trucha $\notin A$.

EJERCICIO 6.1

1. Sea N el conjunto de los números enteros. Escribir con la notación de conjuntos si pertenecen o no a N los siguientes números: *a*) 5; *b*) -4; *c*) $1\frac{1}{2}$; *d*) $\sqrt{2}$, y *e*) $\sqrt{9}$. [*Sugerencia:* $5 \in N$.]

2. Si R es el conjunto de los números racionales, escribir con la notación de conjunto si

$$4{,}5 \quad ; \quad -\frac{3}{7} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad 0{,}7 \quad ; \quad \log 4$$

pertenecen a dicho conjunto.

3. Sea H el conjunto de los corazones en una baraja. ¿Son las siguientes cartas elementos de H: *a*) el as de corazones; *b*) cualquier as?

4. Escribir los subconjuntos de $\{1, 3, 5, 7\}$. ¿Cuántos tiene?

5. Escribir el conjunto formado por los siete primeros números primos (incluido el 1). ¿Cuántos subconjuntos tiene?

6. ¿Son elementos del conjunto de los paralelogramos: *a*) un cuadrado; *b*) un rombo; *c*) un rectángulo, y *d*) un cuadrilátero?

7. ¿Es el conjunto de los paralelogramos un subconjunto del de los trapecios?

8. Decir cuáles de los números 45, 57, 257, 289 pertenecen al conjunto de los números primos.

9. Si X es el conjunto de los triángulos en la figura 6.1, ¿cuántos subconjuntos hay en X?

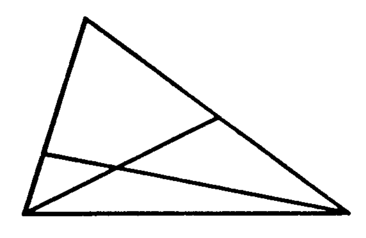


Figura 6.1

6.3. Notación

El símbolo $\subset$ significa «es un subconjunto de» o «está incluido en». Por ejemplo:

$$X \subset Y$$

se lee «X está incluido en Y».

De la misma forma, $\supset$ significa «contiene a» (como subconjunto); así:

$$Y \subset X$$

se lee «Y contiene a X».

Ambas afirmaciones tienen el mismo significado, y se puede poner $X \subset Y \Leftrightarrow Y \supset X$, donde $\Leftrightarrow$ significa «si y sólo si», como ya se ha comentado.

Sin embargo, $X \subset Y$ e $Y \subset X$ (nótese la dirección del símbolo $\subset$) significa $X = Y$, ya que cada elemento de X pertenece a Y y todo elemento de Y pertenece a X.

Ejemplo. Si $X = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ y $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$ y $C = \{1, 3, 7\}$, ¿cuáles, entre A, B y C, son subconjuntos de X?

Claramente $B \subset X$ y $C \subset X$, porque todo elemento de B y de C pertenece a X, pero A no es un subconjunto de X, ya que uno de sus miembros (5), no pertenece a X. Este ejemplo se ilustra en el diagrama de la figura 6.2.

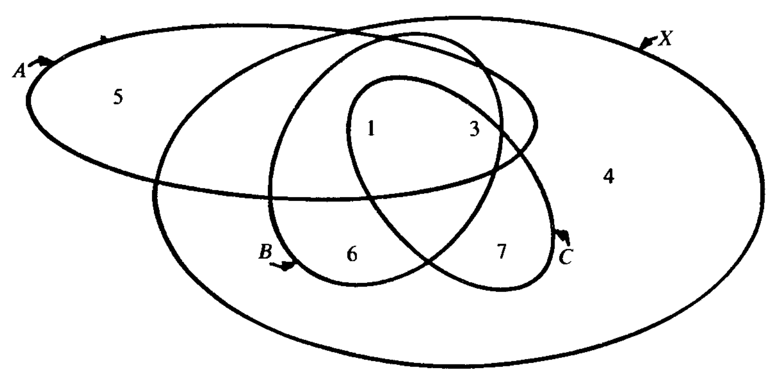


Figura 6.2

6.4. Diagramas de Venn

Supóngase que dibujamos un óvalo y ponemos dentro de él todos los elementos del conjunto X del ejemplo anterior.

Podemos encerrar en óvalos parecidos los elementos de A, B y C. Se ve inmediatamente que los óvalos que contiene los elementos de B y C pueden incluirse totalmente dentro de X, pero el que contiene los elementos de A no puede incluirse totalmente.

Este ejemplo sugiere que los subconjuntos de un conjunto dado pueden encerrarse en óvalos comprendidos dentro de un óvalo, que representa a todo el conjunto (deberíamos decir mejor «curvas cerradas» en lugar de «óvalos», porque muchas de las figuras pueden no tener exactamente la forma de éstos). Una representa-

ción como la que aparece en la figura 6.2 se llama *diagrama de Venn.*

A menudo, es conveniente recuadrar todos los elementos considerados, y formar así lo que llamaremos *conjunto universal* (E). Volviendo al ejemplo anterior, podemos tener E y X como se representa en la figura 6.3.

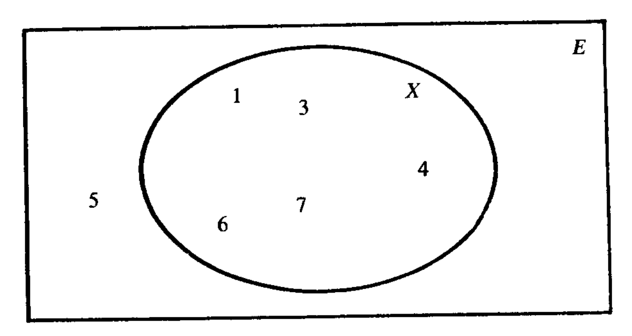


Figura 6.3

No siempre representamos explícitamente todos los elementos de un conjunto en un diagrama de Venn. Supóngase, por ejemplo, que los chicos del curso 2A forman un subconjunto del total de alumnos de 2.° curso que hay en la escuela, y éstos, a su vez, forman un subconjunto de todos los chicos de la escuela.

Así:

$$A = \{\text{Alumnos en 2A}\}$$
$$B = \{\text{Alumnos de 2.° curso}\}$$
$$C = \{\text{Alumnos de la escuela}\}$$

entonces,

$$A \subset B \subset C$$

En un diagrama de Venn, C es el conjunto universal, y podría representarse como en la figura 6.4.

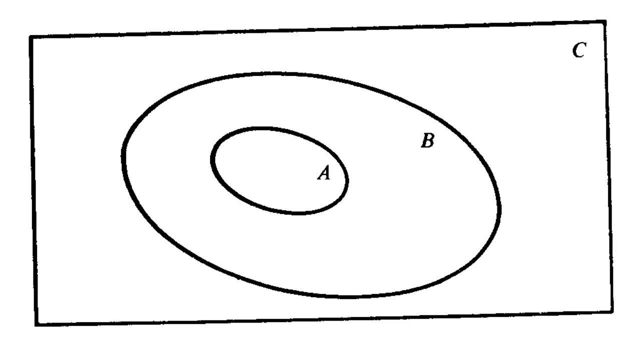


Figura 6.4

En este caso no podemos dibujar ninguno de los elementos, pero podemos imaginarnos a cada uno de ellos representado por un punto. La omisión de estos puntos no causa confusión, sino que clarifica los diagramas.

EJERCICIO 6.2

1. Los perros y los gatos son animales. Representar en un diagrama de Venn que los gatos no son perros. [*Sugerencia:* Tómese E como el conjunto de todos los animales.)

2. Sea E el conjunto de las 52 cartas de una baraja. Si $A =$ $= \{\text{Diamantes}\}$, $B = \{\text{Cartas rojas}\}$, $C = \{\text{Damas}\}$, $D = \{\text{Figuras}\}$, encontrar: *a*) una carta x tal que $x \in A$ y $x \in C$; *b*) todos los subconjuntos Y de D tal que $B \supset Y$ y $C \supset Y$.

3. En el ejercicio 2, ¿habría sido correcto escribir el enunciado como:

a) $\{x : x \in A \text{ y } x \in C\}$; *b*) $\{Y : B \supset Y \text{ y } C \supset Y\}$

4. Sean $M = \{\text{Hombres}\}$, $W = \{\text{Mujeres}\}$, $T = \{\text{Jugadores de tenis}\}$ y E el conjunto de todas las personas. Representar la relación entre ellos mediante un diagrama de Venn. [*Nota:* ¿Qué pasa con los niños?]

5. E es el conjunto de todos los cuadriláteros, A el de los cuadrados, B el de los rectángulos, C el de los paralelogramos y D

el de los rombos. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles falsas:

a) $C \supset D$; *b*) $C \subset B$; *c*) $B \supset A$;
d) $D \supset A$; *e*) $B \supset D \supset A$; *f*) $C \supset D \supset A$.

Escríbase, de nuevo, la primera fase de esta pregunta usando la notación de conjuntos.

6. Explicar si el siguiente argumento es o no correcto: «Un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos. Cierto polígono se sabe que tiene cuatro ángulos rectos. Por eso el polígono es un rectángulo». Completar la explicación con un diagrama de Venn.

7. Si N = {Números naturales}, R = {Números racionales}, I = = {Números enteros}, F = {Fracciones} y Q = {Números reales}[1], dibujar un diagrama de Venn con N, R, I, F y Q, así como la relación que existe entre ellos.

8. Nombrar el conjunto al cual pertenecen los siguientes elementos: gallina, cocodrilo, dinosaurio, tortuga, polilla, hornitorrinco.

6.5. Intersección de conjuntos

En un hogar cualquiera podemos encontrar a la madre, al padre, a Hilario, a Pedro, al gato y a un pececillo. El conjunto universal que acoge a los animales presentes en la casa es:

$$E = \{\text{madre, padre, Hilario, Pedro, gato, pez}\}$$

El subconjunto que corresponde a los animales de sangre caliente es:

$$W = \{\text{madre, padre, Hilario, Pedro, gato}\}$$

y el subconjunto de los animales no humanos, al que llamaremos N, es:

$$N = \{\text{gato, pez}\}$$

[1] Todos estos conjuntos han sido definidos en el capítulo 1.

Entonces:

$$\text{gato} \in W \quad \text{y} \quad \text{gato} \in N$$

pero

$$N \not\supset W \quad \text{y} \quad W \not\supset N$$

Luego a pesar de que N y W tienen un elemento en común ({gato}), ninguno de los dos es subconjunto del otro.

(Usamos el símbolo $\not\supset$ para decir «no contiene como subconjunto a» y $\not\subset$ para decir «no es un subconjunto de» o «no está incluido en».)

Usando una única letra minúscula para designar a los elementos del conjunto E (por ejemplo, m representa a madre y f a padre) en un diagrama de Venn, la representación de W y N puede verse en la figura 6.5.

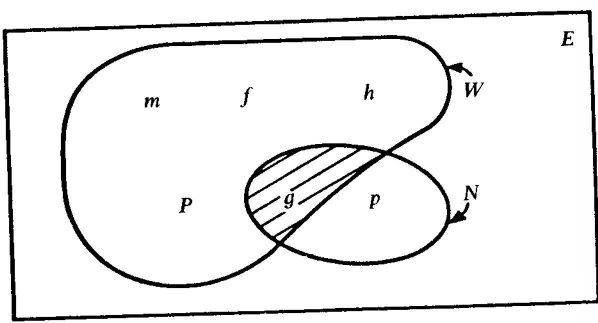


Figura 6.5

Esta situación nos lleva a considerar la relación existente entre N y W. Evidentemente, tienen algo en común (un elemento, el gato). Se dice que N y W tienen una intersección no vacía. El símbolo que se usa para la intersección es $\cap$. Así:

$$W \cap N = \{\text{gato}\}$$

Esta expresión se lee: «la intersección de W y N es un conjunto de un elemento, el gato». Evidentemente, {gato} es un subconjunto, tanto de N como de W.

Definición. La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos comunes a uno y otro conjunto. Simbólicamente se escribe $A \cap B$ y se lee, para abreviar, «A cap B».

En el diagrama de Venn de la figura 6.6, el área rayada representa la intersección entre A y B.

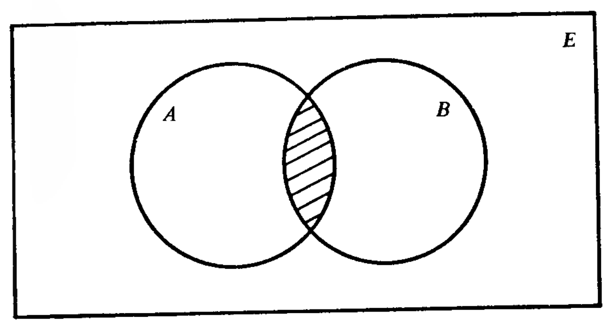


Figura 6.6

Si dos conjuntos incluidos en E no tienen ningún elemento en común, tenemos (Fig. 6.7) $A \cap B = \phi$ (conjunto vacío), en cuyo caso los conjuntos A y B se llaman disjuntos.

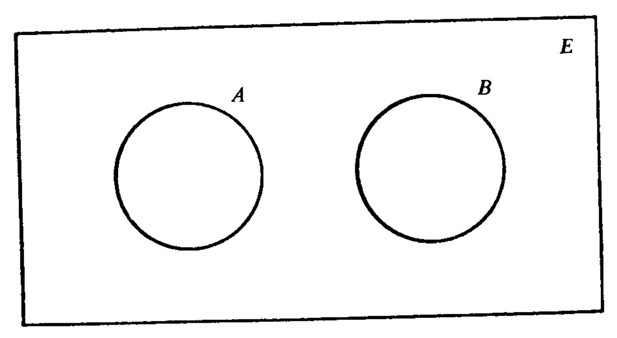


Figura 6.7

Ejemplo. Si $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8\}$, escribir los conjuntos $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

Tenemos que $A \cap B = \{1, 5\}$, porque el 1 y el 5 son los únicos elementos de A que están también en C.

De la misma forma, $A \cap C = \{2, 4, 8\}$ y $B \cap C = \phi$, porque no existe ningún elemento común entre B y C.

EJERCICIO 6.3

1. Si $A = \{1, 3, 7, 9, 10\}$, $B = \{2, 3, 6, 7, 10\}$ y $C = \{1, 2, 3, 7\}$, escribir $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

2. Con los tres conjuntos anteriores escribir $(A \cap B) \cap C$. [*Sugerencia:* Escribir primero $A \cap B = X$ y después $X \cap C$.]

3. Escribir:

a) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \cap \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$;
b) {Números primos menores de 10} $\cap$ {Enteros impares};
c) $\{2, 4, 6, 7\} \cap \{3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 3, 4, 5, 7\}$;
d) {Peces} $\cap$ {Marsopas}.

4. Dibujar dos diagramas de Venn con tres conjuntos A, B y C, de forma que A y B no sean disjuntos y A y C sean no disjuntos también. En uno de los diagramas, conseguir que B y C sean disjuntos; en el otro, hacer que B y C no sean disjuntos.

¿La expresión «A y B no son disjuntos», equivale a decir «$A \cap B \neq \phi$»?

[*Nota:* $\neq$ significa «no es igual».]

5. A es el conjunto de los rectángulos y B el de los rombos. ¿Cuál es el conjunto $A \cap B$?

6. Todos los niños de un club montan en bicicleta. Si Sydney es un miembro del club, ¿montará en bicicleta?

7. ABC es un triángulo. P es el conjunto de puntos que equidistan de B y C, Q es el conjunto de los puntos equidistantes de C y A. Representar, cuidadosamente, P y Q y señalar $P \cap Q$.

6.6. Unión de conjuntos

En el apartado anterior hemos concentrado nuestra atención en el estudio de aquellos elementos que son comunes a dos o más conjuntos. Ahora fijaremos nuestra atención en todos los elementos que pertenecen a los conjuntos considerados.

Supóngase que tenemos dos conjuntos $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$. Hay dos elementos en cada conjunto, pero sólo hay tres elementos distintos si consideramos ambos, $\{1, 2, 3\}$. Al conjunto $\{1, 2, 3\}$ se le llama *conjunto unión de los dados.*

Si invertimos el símbolo para la intersección tenemos $\cup$, que es el que se usa para la unión de conjuntos. $A \cup B$ se lee «la unión de A y B» y de forma abreviada «A cup B».

Considérese $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

En un diagrama de Venn, la situación anterior quedaría representada por la zona sombreada en la figura 6.8.

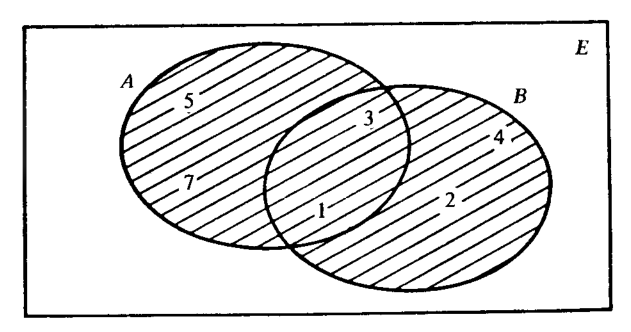


Figura 6.8

Es importante resaltar que los elementos de A y B sólo aparecen una vez en la unión, incluso si son elementos de los dos conjuntos (en este ejemplo, los elementos 1 y 3 están en A y en B).

Definición. La unión de dos conjuntos es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto, considerando cada elemento sólo una vez.

Según el diagrama de Venn de la figura 6.9, el área sombreada es $X \cup Y$.

Podemos considerar casos más complejos de unión e intersección. Por ejemplo, $A \cup (B \cap C)$ significa: «la unión de A con el conjunto formado por la intersección de B y C». Primero se realiza la operación que está entre paréntesis.

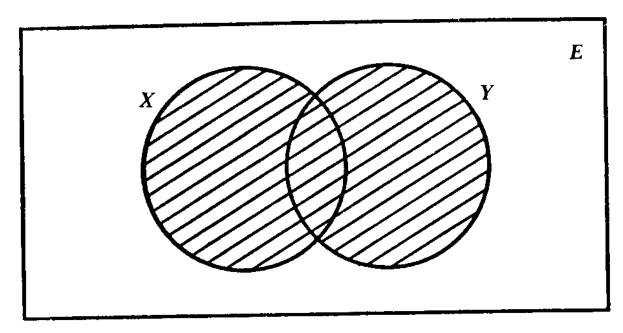


Figura 6.9

Ejemplo. Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{5, 6, 7, 8\}$. Calcular:

a) $A \cup (B \cap C)$; *b*) $(A \cup B) \cap C$;
c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$; *d*) $(A \cap C) \cap (B \cap C)$.

a) Resolviendo primero la parte entre paréntesis se tiene:

$$B \cap C = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{6, 8\}$$
$$A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 8\} \cup \{6, 8\} = \{1, 3, 5, 6, 8\}$$

b) Resolviendo, como en *a*), primero la operación entre paréntesis, se tiene:

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 8\} \cup \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{5, 6, 8\}$$

Hay que destacar que el resultado en *a*) y en *b*) no ha sido el mismo, aunque las expresiones contenían a *A*, *B*, *C*, $\cap$ y $\cup$, exactamente en el mismo lugar. Esto demuestra que la posición de los paréntesis y, por tanto, el orden en que se realizan las operaciones, es de gran importancia.

c) Se tiene

$$A \cap C = \{1, 3, 5, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{5, 8\}$$

y

$$B \cap C = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{6, 8\}$$

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{5, 8\} \cup \{6, 8\} = \{5, 6, 8\}$$

d) De igual modo,

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = \{5, 8\} \cap \{6, 8\} = \{8\}$$

Ejemplo. Un club tiene 24 miembros, de los cuales 16 juegan al tenis, 14 al bridge y 9 juegan a las dos cosas. ¿Cuántos no juegan a ninguno de los dos juegos?

La manera más simple de resolver este problema es dibujar un diagrama de Venn (Fig. 6.10). Aquí introduciremos un nuevo concepto, y llamaremos card(A) (cardinal de A) al número de elementos del conjunto A.

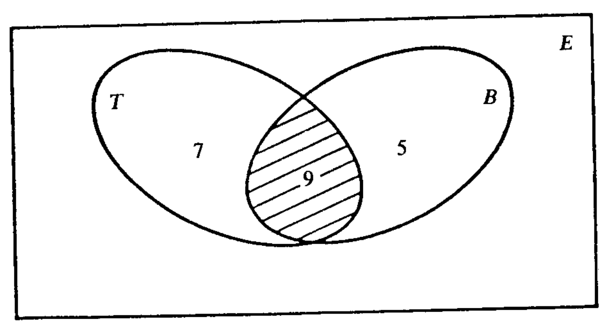


Figura 6.10

Dibujamos las curvas cerradas que representan a $T = \{$Jugadores de tenis$\}$ y $B = \{$Jugadores de bridge$\}$. Sabemos que estos dos conjuntos tienen una intersección no vacía, de hecho nueve personas juegan a las dos cosas, luego las curvas deben cortarse entre sí. Ponemos un 9 en la intersección (card$(T \cap B) = 9$), entonces el número de elementos de T que no están en $T \cap B$ es $16 - 9 = 7$, y el número de elementos de B que no están en $T \cap B$ es $14 - 9 = 5$:

$$\text{card}(T \cup B) = 9 + 7 + 5 = 21$$

(Éste es el número de elementos de la unión de T y B.)

Ahora, como card$(E) = 24$ (el número total de miembros del club):

$$\text{card}(E) - \text{card}(T \cup B) = 24 - 21 = 3$$

Éste es el número de miembros del club que no juega a ninguno de los juegos considerados.

Aunque en este ejemplo hemos usado convenientemente un signo menos en la última expresión, debemos expresar nuestras reservas, por razones que parecerán evidentes más adelante. En el capítulo 8 (Ap. 8.4: «El complementario de un conjunto»), se emplea una notación mucho más acertada.

EJERCICIO 6.4

En las cuestiones de la 1 a la 5 de este ejercicio, A representa los puntos dentro del cuadrado y B representa los puntos dentro del círculo, de la figura 6.11.

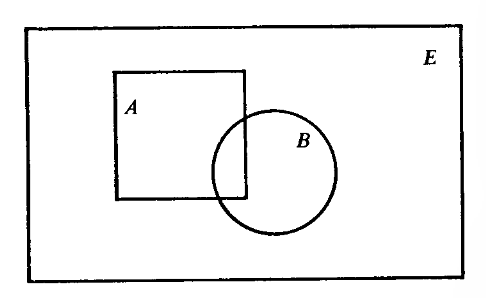


Figura 6.11

1. Dibujar dos veces la figura 6.11. En el primer caso, sombrear $A \cap B$. En el segundo caso, sombrear $A \cup B$.

2. Dibujar la figura 6.12 y sombrear $A \cup B$. ¿Qué es $A \cap B$? Si escribimos $A \cap B = \{\}$, ¿qué debemos escribir entre las llaves?

3. Dibujar la figura 6.13 dos veces, sombreando en la primera figura $A \cap B$, y en la segunda $A \cup B$.

4. Además de A y B, definidos anteriormente, consideramos también C, que es el conjunto de puntos comprendidos dentro de

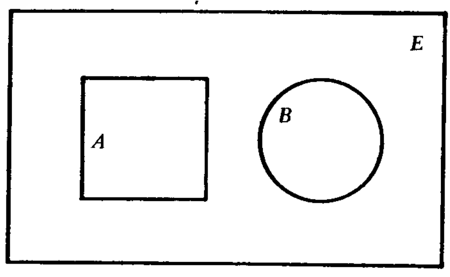


Figura 6.12

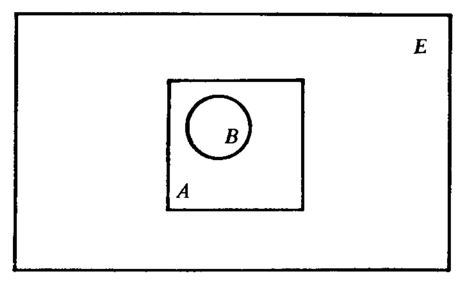


Figura 6.13

un triángulo. Dibujar los diagramas de Venn, basados en la figura 6.14, que reflejen:

a) $A \cap (B \cap C)$; *b*) $A \cup (B \cap C)$;
c) $A \cup (B \cup C)$; *d*) $A \cap (B \cup C)$.

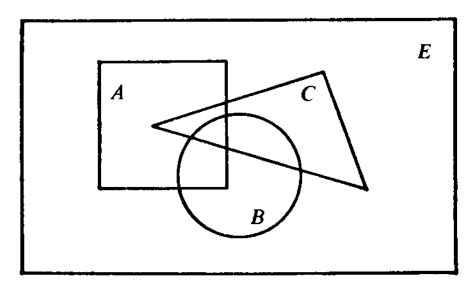


Figura 6.14

[*Nota:* No son necesarios los paréntesis en *a*) y *c*) porque no existe ambigüedad en el resultado. Esto se demostrará más adelante. En *b*) y en *d*) los paréntesis son esenciales.]

5. Si $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 6, 8, 9\}$ y $C = \{2, 3, 4, 6, 8\}$, escribir $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup B$ y $A \cup C$. Demostrar también que:

a) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$
b) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

6. Usando los conjuntos A, B y C, definidos en la cuestión 5, demostrar que

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap B$$

[Esta afirmación es cierta sea cual sea el orden de A, B y C, dentro de los paréntesis, y es cierto para los tres considerados a la vez. De hecho, podemos escribir $A \cap B \cap C$.]

7. Si A, B y C son tres conjuntos cualesquiera representados por sus correspondientes recintos en un diagrama de Venn, demostrar que $A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup B$. [De nuevo, el orden de las letras y la posición de los paréntesis es irrelevante, y podemos escribir $A \cup B \cup C$.]

8. Dibujar tres conjuntos en dos diagramas de Venn, de modo que sus recintos se corten entre sí (es el caso más general). En el primero, sombrear $P \cap (Q \cup R)$ y en el segundo $(P \cap Q) \cup R$, y ver que no se obtiene el mismo resultado. [Aquí no podemos omitir los paréntesis de ninguna forma.]

9. Si $A \supset B$, demostrar que $A \cap B = B$. ¿A qué sería igual, en este caso, $A \cup B$?

10. Si X, Y y Z son tres conjuntos, decir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles son falsas:

a) $(X \cup Y) \supset Y$; *b*) $(X \cap Y) \supset Y$;
c) $X \cap (Y \cup Z) \supset Y \cap Z$.

Dibujar un diagrama de Venn para ilustrar cada una de las situaciones anteriores.

7 Desigualdades

7.1. Desigualdades

Añadiremos los símbolos ($>$), que significa «mayor que», y ($<$), que significa «menor que», a nuestro vocabulario. Dos números cualesquiera a y b relacionados entre sí por uno de estos dos símbolos ($a > b$ o $b < a$) forman una desigualdad o una inecuación si alguno de ellos es desconocido. Las relaciones $a > b$ y $b < a$ son equivalentes.

Sabemos que 5 es mayor que 2 ($5 > 2$) y que 2 es menor que 5 ($2 < 5$). Sobre la recta real podemos ver, a simple vista, que, en caso de números positivos, todo número es mayor que aquellos que se encuentran a su izquierda. Puede extenderse esta idea a toda la recta real (Fig. 7.1).

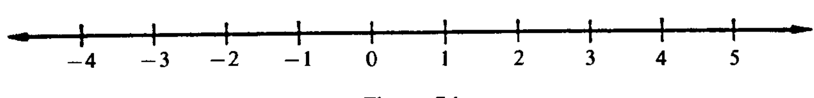


Figura 7.1

$$5 > 2 \ , \ 2 > -3 \ , \ 0 > -2 \ , \ -1 > -4$$

La situación puede aclararse si se considera a un hombre en mitad de una escalera, lugar al que llamaremos nivel cero. Cada peldaño que suba por la escalera lo consideraremos como $+1$, y cada peldaño que baje, lo consideraremos como -1 (Fig. 7.2).

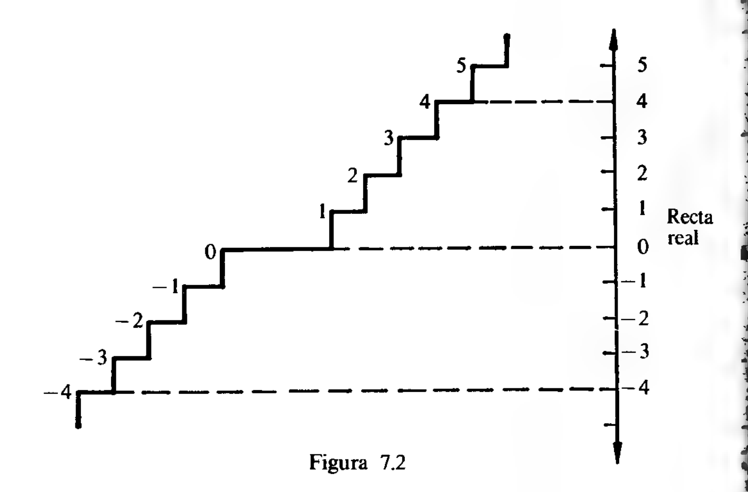


Figura 7.2

De la misma forma, una persona que debe 100 pesetas tiene más dinero que otra que debe 400 pesetas.

7.2. Definición de conjuntos mediante inecuaciones

La expresión $\{x: x > 3\}$ significa «el conjunto de todos los números x que son mayores que 3». Sobre la recta real esto quedaría como vemos en la figura 7.3.

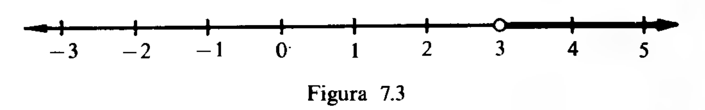


Figura 7.3

De la misma forma, $\{x: x < 2\}$ significa «el conjunto de todos los números x menores que 2», y sobre la recta real podría reflejarse según vemos en la figura 7.4.

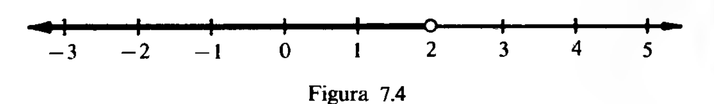


Figura 7.4

El circulito en blanco que aparece al final del conjunto, limitándolo, indica que el número situado al final del conjunto, en la recta real, no pertenece al mismo. Sin embargo, si quisiésemos incluir en el conjunto a este punto, usaríamos los símbolos anteriores modificados ligeramente: ($\geqslant$) significa «mayor o igual que», y ($\leqslant$) significa «menor o igual que». Así, $\{x: x \geqslant -1\}$ podría representarse en la recta real como vemos en la figura 7.5.

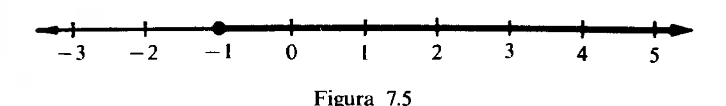


Figura 7.5

Esta vez, el número que limita al conjunto está incluido en él, esto es, queda recogido por el pequeño círculo relleno en negro que aparece en la recta real.

Finalmente, podemos considerar una situación tal como $\{x: -1 < x \leqslant 2\}$, o bien, $\{x: x \geqslant 2 \text{ o } x \leqslant -2\}$.

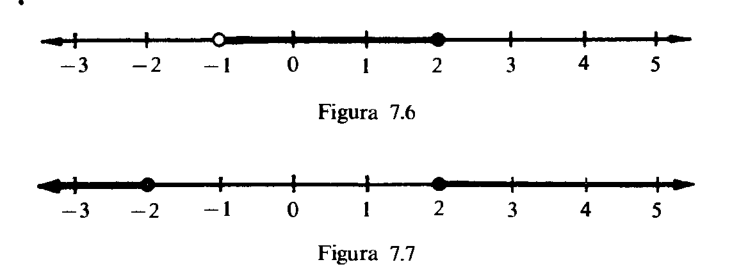


Figura 7.6

Figura 7.7

Las dos últimas expresiones son frecuentes al resolver inecuaciones cuadráticas.

Ejemplo. Considérese $x^2 - 4 \geqslant 0$. Tenemos que

$$(x - 2)(x + 2) \geqslant 0$$

Ahora, aplicando las más elementales reglas del álgebra podemos ver que

$$(+)\cdot(+) = (+) \quad \text{y} \quad (-)\cdot(-) = (+)$$

luego

$$x^2 - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x + 2) \geqslant 0 \quad \text{y} \quad (x - 2) \geqslant 0$$

o

$$(x + 2) \leqslant 0 \quad \text{y} \quad (x - 2) \leqslant 0$$

El primer par de relaciones se satisface si $x \geqslant 2$; en este caso, $x - 2$ y $x + 2$ son ambos positivos (o uno de ellos es cero). La otra pareja de inecuaciones se satisface si $x \leqslant -2$; en este caso, $x - 2$ y $x + 2$ resultan negativos (o una de ellas cero):

$$\{x: x^2 - 4 \geqslant 0\} = \{x: x \geqslant 2\} \cup \{x: x \leqslant -2\}$$

La unión de este par de conjuntos contiene todos los números $x \geqslant 2$ y $x \leqslant -2$.

La situación anterior se recoge en la figura 7.7.

Ejemplo. Considérese $\{x: x^2 - x - 2 < 0\}$. Tenemos

$$(x - 2)(x + 1) < 0$$

$$x - 2 < 0 \quad \text{y} \quad x + 1 > 0 \qquad (1)$$

o

$$x - 2 > 0 \quad \text{y} \quad x + 1 < 0 \qquad (2)$$

porque $(-)(+) = (-)$.

Según (1), se tiene $x < 2$ y $x > -1$, condiciones que pueden verificarse a la vez.

Según (2), se tiene $x > 2$ y $x < -1$, condiciones que no pueden verificarse a la vez. Entonces:

$$\{x: x^2 - x - 2 < 0\} = \{x: -1 < x < 2\}$$

7.3. Axiomas de las desigualdades

Para poder trabajar con inecuaciones necesitamos cuatro axiomas, dos para la suma y dos para la multiplicación. Los dos relacionados con la suma se entienden fácilmente, pero los relacio-

nados con la multiplicación requieren algo más de atención. La idea de la recta real será, sin embargo, de gran utilidad.

Axioma 1. Si se suma el mismo número en los dos miembros de la desigualdad, se conserva el sentido de la misma. Así, si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

Axioma 2. Si se resta un mismo número en los dos miembros de la desigualdad, se conserva el sentido de la misma. Así, si $a > b$, entonces $a - c > b - c$. En esencia, éste es el mismo axioma que el primero, porque restar c es lo mismo que sumar $-c$, pero en este momento conviene separarlos.

Ejemplo. Considérese $4 > -1$. Si sumamos 3 a ambos miembros, entonces:

$$4 + 3 > -1 + 3 \quad \text{(axioma 1)}$$

$$7 > 2 \quad \text{(que es evidente)}$$

Sobre la recta real, la representación en la recta real será la de la figura 7.8.

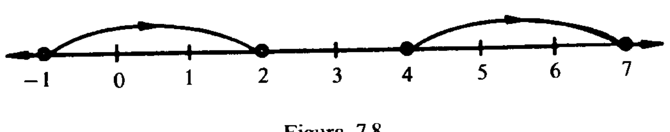


Figura 7.8

En este caso, los puntos que representaban ambos lados de la desigualdad, se han transportado tres lugares enteros hacia la derecha. Si hubiéramos restado 3, se hubieran desplazado hacia la izquierda.

Axioma 3. Si cada lado de la desigualdad se multiplica por el mismo número positivo, el sentido de la misma no cambia.

Axioma 4. Si se multiplican ambos lados de una desigualdad por el mismo número negativo, el sentido de la misma cambia, y el signo debe ser invertido. Este axioma es gran importancia y suele causar dificultades al estudiante que lo encuentra por primera vez.

Ejemplo. Considérese $3 > 2$. Si multiplicamos ambos lados por 2,

$$3 \cdot 2 > 2 \cdot 2 \quad \text{(axioma 3)}$$

$$6 > 4 \quad \text{(que es evidente)}$$

Puede verse claramente que si un hombre se encuentra en el escalón 3 de la figura 7.2 y una mujer se encuentra en el escalón 2, si multiplican por 2 el escalón en el que se encuentran, el hombre subirá al 6 y la mujer al 4, y el hombre seguirá estando dos escalones más arriba.

Consideremos, sin embargo, que $3 > 2$, y multiplicamos ambos lados por -2. Tenemos, entonces:

$$-2 \cdot 3 < -2 \cdot 2 \quad \text{(axioma 4. La desigualdad cambia el sentido)} \Rightarrow$$

$$-6 < -4$$

Puede ser de gran ayuda hacer uso de nuevo del dibujo de la figura 7.2. Un hombre situado en el escalón número 3 que multiplica su nivel por -2, se traslada al escalón -6, mientras que una mujer en el escalón 2 se traslada al escalón -4 que está por encima del -6. Esta situación puede apreciarse también trabajando sobre la recta real (Fig. 7.9).

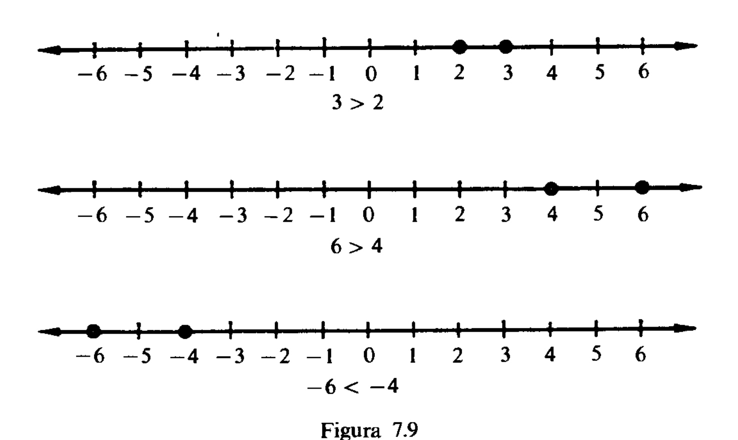


Figura 7.9

Ejemplo. Resolver la ecuación $3x + 5 > 17$.

$$3x > 12 \quad \text{(restando 5, axioma 2)}$$
$$x = 4 \quad \text{(axioma 3)}$$

Ejemplo. Resolver $2 - 5x < 11$.

$$-5x < 9 \quad \text{(axioma 2)}$$
$$\Rightarrow \quad 5x > -9 \quad \text{(multiplicando por } -1\text{, axioma 4)}$$
$$\Rightarrow \quad x > -1{,}8$$

Ejemplo. Encontrar todos los números x tal que $\{x: 2x - x^2 <$ $< 3x - 12\}$.

$$2x - x^2 < 3x - 12$$
$$\Rightarrow -x^2 - x + 12 < 0$$
$$\Rightarrow x^2 + x - 12 > 0$$
$$\Rightarrow (x + 4)(x - 3) > 0$$
$$\Rightarrow x > 3 \text{ ó } x < 4$$

(omitimos los axiomas que se aplican una vez entendidos).

EJERCICIO 7.1

Resolver las siguientes inecuaciones e ilustrar cada ejemplo sobre la recta real (para las cuestiones de la 1 a la 5).

1. *a*) $2x + 7 > 23$; *b*) $S = \{x: 2x + 7 > 23\}$

2. *a*) $6x - 4 > x$; *b*) $S = \{x: 6x - 4 > x\}$

3. *a*) $2 - 3x \leqslant 2x + 3$; *b*) $S = \{x: 2 - 3x \leqslant 2x + 3\}$

4. $4x^2 - 9 \leqslant 0$

5. $x^2 + 3x + 2 \leqslant 5(x + 2)$

6. Representar S sobre la recta real, sabiendo que

$$S = \{x: x - 2 < 2\} \cap \{x: 3x > 5\}$$

[*Sugerencia:* El primer conjunto es tal que $x < 4$ y el segundo $x > 1 + 2/3$. El conjunto intersección resulta: $1 + 2/3 < x < 4$, y podemos ilustrarlo como en la figura 7.6, aunque el diagrama cambie.]

7. Representar S sobre la recta real, siendo:

$$S = \{x: 2x + 5 < 0\} \cup \{x: 3 - x < 0\}$$

Representar también $S \cap T$, siendo

$$T = \{x: x^2 - 16 \leqslant 0\}$$

Expresar el resultado: *a*) por inecuaciones, y *b*) con notación de conjuntos.

7.4. Representación gráfica de inecuaciones con dos variables (x, y)

Cualquier línea recta viene determinada, en la geometría euclidiana, por dos puntos en el espacio. También sabemos por álgebra que cualquier ecuación en x e y, tal como $3x + 2y = 5$, puede representarse por una línea recta en el plano determinado por los ejes OX y OY.

Ahora intentaremos representar una inecuación lineal. Por ejemplo, siguiendo con $3x + 2y = 5$, podemos tener:

$$3x + 2y > 5 \ , \ 3x + 2y \geqslant 5 \ , \ 3x + 2y \leqslant 5 \ , \ 3x + 2y < 5$$

en total, cuatro relaciones distintas.

Consideremos primero la representación de $3x + 2y = 5$.

x	0	1	2
y	2,5	1	−0,5

Consideremos $x = 0, 1, 2$ y calculemos, para rellenar la tabla, los correspondientes valores de y. Ahora representamos la línea recta (0, 2,5) y (1, 1) que, como comprobación, debe pasar por el punto (2, −0,5). La recta divide el plano en tres conjuntos de puntos. Uno de ellos, que abarca los puntos sobre la línea S_1, otro conjunto lo forman los puntos a un lado de la línea S_2, y el tercero los puntos al otro lado de la línea S_3.

Ahora:

$$S_1 = \{(x, y): 3x + 2y = 5\}$$

es el conjunto de pares ordenados que cumplen la ecuación $3x + 2y = 5$ (para la definición de pares ordenados, véanse los capítulos 2 y 3).

Supóngase que queremos dibujar:

$$S_2 = \{(x, y): 3x + 2y > 5\}$$

Aquí, si colocamos $x = 0$, tenemos $y > 2{,}5$ y si ponemos $x = 5$, tenemos $y > 1$. En ambos casos, coordenada y de $S_2 >$ coordenada y de S_1, y esto se verifica para todo elemento de S_2. La representación de S_2 es la región del plano XY por encima de la recta $3x + 2y = 5$. Esta región está rayada en la figura 7.10, y se denomina *semiplano*. La línea S_1 está señalada en discontinua y no está incluida en S_2.

Si se nos pregunta por la representación de $3x + 2y \geqslant 5$, la recta dibujada estaría incluida en el conjunto y se habría dibujado continua:

$$S_1 \cup S_2 = \{(x, y): 3x + 2y = 5\} \cup \{(x, y): 3x + 2y > 5\}$$

La representación de $3x + 2y < 5$ y $3x + 2y \leqslant 5$, se habría realizado de la misma forma, pero considerando el semiplano por debajo de S_1.

Dos casos especiales necesitan ser comentados. La representación de ecuaciones como $y \leqslant 2$ y $x > -3$, donde solamente se contempla una variable, puede comprenderse fácilmente. Se han representado en las figuras 7.11*a* y *b*, respectivamente.

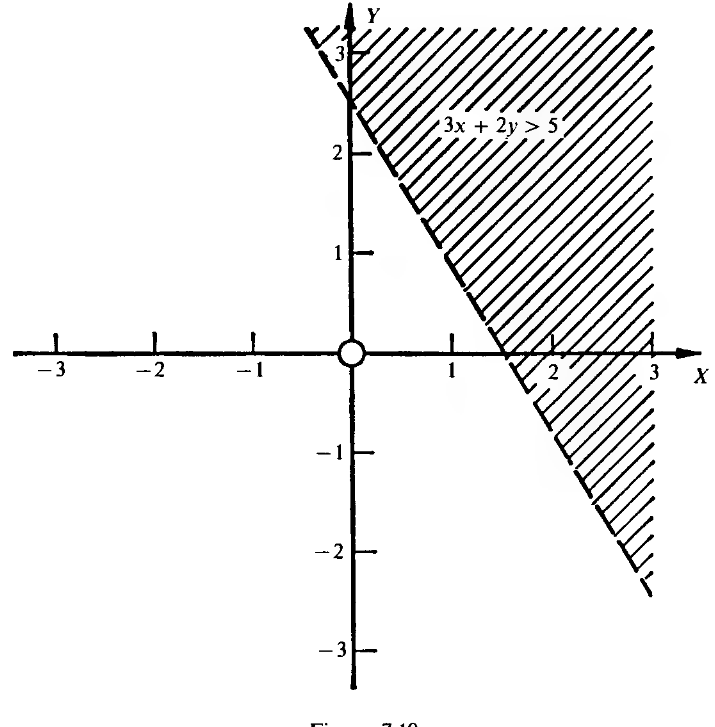


Figura 7.10

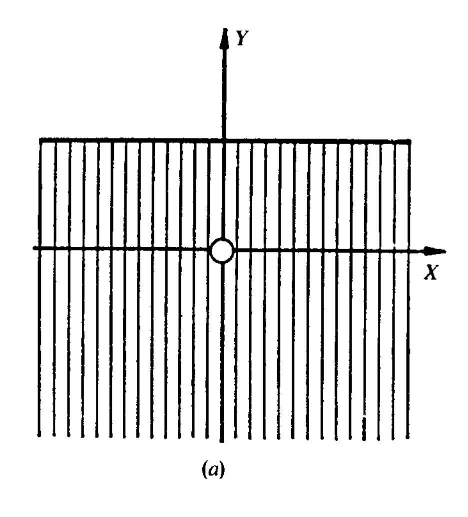
Supóngase ahora que necesitamos una región delimitada por varias condiciones, por ejemplo todos los puntos:

$$(x, y) \in \{(x, y): 3x + 2y \leqslant 5\} \cap$$

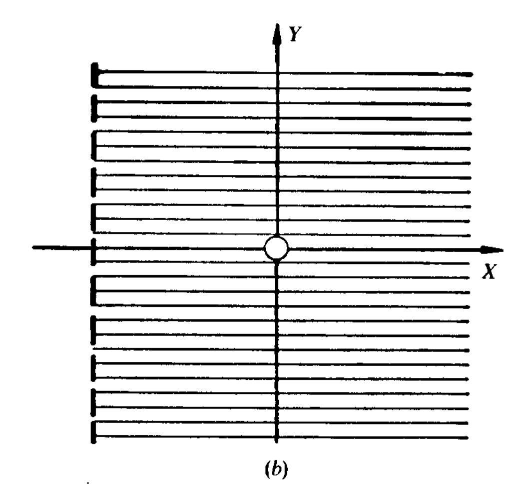
$$\cap \{(x, y): x \geqslant -3\} \cap \{(x, y): y \leqslant 2\}$$

Haciendo uso de las figuras 7.10 y 7.11 adecuadamente, podemos dibujar la figura 7.12.

Puede observarse que en este caso la región está abierta por uno de sus lados, pero frecuentemente la región queda totalmente limitada y aparecen encerradas en una curva o en un polígono. Por ejemplo, $\{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ es el conjunto de puntos encerrados dentro de un círculo con centro en el origen y radio dos unidades.



(*a*)



(*b*)

Figura 7.11

Puede verse fácilmente (por aquellos que no conocen la ecuación de una circunferencia) que $x^2 + y^2 = 4$ es la circunferencia que limita el círculo antes referido, considerando el triángulo rectángulo OPN de la figura 7.13, P es cualquier punto (x, y) a 2 unidades del centro y N es el punto al pie de la perpendicular al eje OX desde el punto P.

Figura 7.12

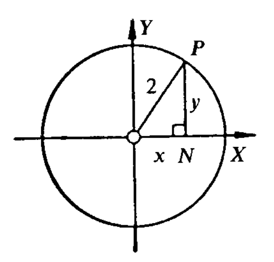


Figura 7.13

Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$ON^2 + NP^2 = OP^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Cualquier punto $Q(x, y)$ tal que $OQ \leqslant OP$, está dentro del círculo limitado por la anterior circunferencia:

$$(x, y) \in \{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

El conjunto completo está formado por la circunferencia y el círculo comprendido dentro de ella (Fig. 7.14).

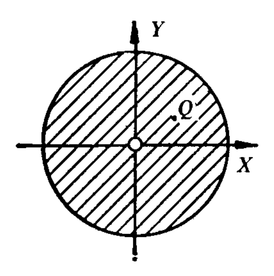


Figura 7.14

EJERCICIO 7.2

Dibujar la región que representan las inecuaciones de los ejercicios 1 al 3.

1. $y \geqslant x + 2$

2. $2x + y < 0$

3. $4y + 5 > 0$

Representar las regiones definidas en los ejercicios 4 al 6.

4. $S = \{(x, y): x + y \geqslant 0\} \cap \{(x, y): y + 2 \geqslant 0\}$

5. $T = \{(x, y): y \leqslant x + 1\} \cap \{(x, y): x \leqslant 4\} \cap \{(x, y): y > -1\}$

6. $A = \{(x, y): (x^2 - 4)(y^2 - 9) < 0\}$

7. Determinar la región del plano XY que verifica:

$$(x, y) \in \{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant 9\} \cap \{(x, y): x^2 - 4 \leqslant 0\}$$

7.5. Producto cartesiano

Supóngase que tenemos los conjuntos de números enteros siguientes:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad B = \{5, 7, 9, 11\}$$

Definimos el producto cartesiano de $A \times B$ al conjunto de pares ordenados:

$$(1, 5)\ ,\ (1, 7)\ ,\ (1, 9)\ ,\ (1, 11)$$
$$(2, 5)\ ,\ (2, 7)\ ,\ (2, 9)\ ,\ (2, 11)$$
$$(3, 5)\ ,\ (3, 7)\ ,\ (3, 9)\ ,\ (3, 11)$$

(donde el número correspondiente al primer conjunto debe colocarse en primer lugar), en el cual cada elemento del primer conjunto se empareja con todos y cada uno de los elementos del segundo conjunto. El primer conjunto de elementos ($\{1, 2, 3\}$) se llama *dominio* y el segundo ($\{5, 7, 9, 11\}$) se llama *rango.*

De la misma forma, si dos muchachos {Pedro, Jorge} invitan a tres bellas muchachas {Mary, Ana, Catalina} a un baile, las distintas formas en que pueden formar pareja son:

(Pedro, Mary) ; (Pedro, Ana) ; (Pedro, Catalina)

(Jorge, Mary) ; (Jorge, Ana) ; (Jorge, Catalina)

El resultado general de realizar el producto cartesiano de dos conjuntos $A \times B$ puede expresarse:

$$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \quad \text{y} \quad B = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$$

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), ..., (x_1, y_m)$$
$$(x_2, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_2, x_m)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_n, y_1), (x_n, y_2), ..., (x_n, y_m)$$

Existen en total n filas y m columnas, luego hay $n \cdot m$ pares ordenados.

Ejemplo. Si $A = \{1, 2, 3\}$, representar los elementos de $A \times A$. Indicar también los elementos (x, y) de $A \cap \{(x, y)\colon y < x + 1\}$.

En la figura 7.15 se representan los nueve puntos (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), etc., de $A \times A$, y en la figura 7.16 se representan aquellos que satisfacen además la inecuación $y < x + 1$.

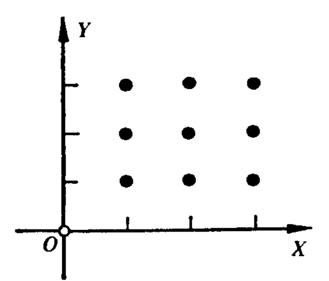


Figura 7.15

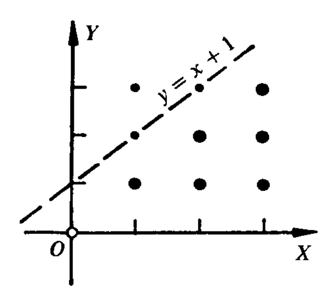


Figura 7.16

Ejemplo. Dibujar en el mismo diagrama las rectas $x = 4$, $y = -1$, $x = y + 1$. Indicar sobre el dibujo la región S que se define como:

$$S = \{(x, y): x - y < 1\} \cap \{(x, y): x < 4\} \cap \{(x, y): y > -1\}$$

Si $(3{,}5, \lambda) \in S$, encontrar los valores entre los que λ está comprendido. Establecer todos los valores enteros de λ y marcar los puntos correspondientes en el diagrama.

El límite inferior de $(3{,}5, \lambda)$ viene dado por $x = 3{,}5$, $y = -1$. El límite superior está en $x = y + 1$, $x = 3{,}5$, luego $y = 2{,}5$; por tanto, el rango de valores de λ estará en

$$-1 < \lambda < 2{,}5$$

Los puntos extremos de este intervalo no se incluyen en este caso. Queda representado en la figura 7.17. Los únicos valores

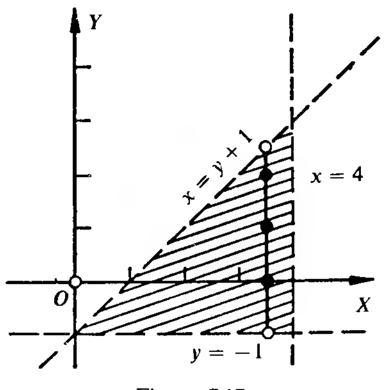


Figura 7.17

enteros de λ son 0, 1, 2 (los puntos extremos son $\lambda = -1$ y $\lambda = 2{,}5$. Como uno de ellos es entero, es inadmisible en este caso).

EJERCICIO 7.3

1. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{-2, 0, 2\}$, escribir todos los elementos de $A \times B$ que están dentro del círculo, o sobre la circunferencia, definidos por la ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

2. Dibujar la curva $4y = x^2$ para aquellos valores de x tales que $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Sombrear la región que está definida por $S = \{(x, y){:}y \geqslant 1/4x^2\} \cap \{(x, y){:}y \leqslant 2\}$.

Supuesto E el conjunto universal de los números enteros (incluido el cero) y que S está definido por la ecuación anterior, señalar en el dibujo los elementos de $(E \times E) \cap S$. Hacer una tabla con las coordenadas cartesianas de los puntos anteriores.

3. Dibujar el conjunto $S = \{(x, y){:}2x + y \geqslant 3\} \cap \{(x, y){:}x^2 + y^2 \leqslant 4\}$. Si Z es el conjunto de los números enteros incluido el cero, escribir las coordenadas cartesianas de todos los puntos (x, y) tales que $x \in z$, $y \in z$, $(x, y) \in S$.

8 Programación lineal

8.1. Forma explícita de la ecuación de una línea recta

Para resolver los problemas basados en las ideas gráficas desarrolladas en los apartados 7.4 y 7.5 anteriores, será de ayuda en este momento ampliar un poco más los conocimientos sobre las líneas rectas.

Con los ejes rectangulares OX, OY (véase Ap. 3.2), donde OX es horizontal y OY vertical, dibuje una línea recta CB, que corte a OY en A. El segmento OA se llama *ordenada* en el origen, y comúnmente se pone como $OA = c$.

Sobre AB tome un punto P de coordenadas (x_1, y_1). Dibuje PM perpendicular a OX, encontrándolo en M; dibuje AN perpendicular a PM, encontrándolo en N. Ahora, $OM = x_1$, $MP = y_1$ y, por tanto (Fig. 8.1), $AN = OM = x_1$ y $MN = OA = c$

Definamos ahora la pendiente *(gradiente)* de la línea CB como la tangente del ángulo que forma ésta con la dirección positiva de OX; pero AN es paralela a OX y, por tanto, el ángulo requerido es $NAP = \theta$.

Entonces,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{NP}{AN} = \frac{MP - MN}{OM} = \frac{y_1 - c}{x_1}$$

esto es,

$$x_1 \operatorname{tg}\theta = y_1 - c$$

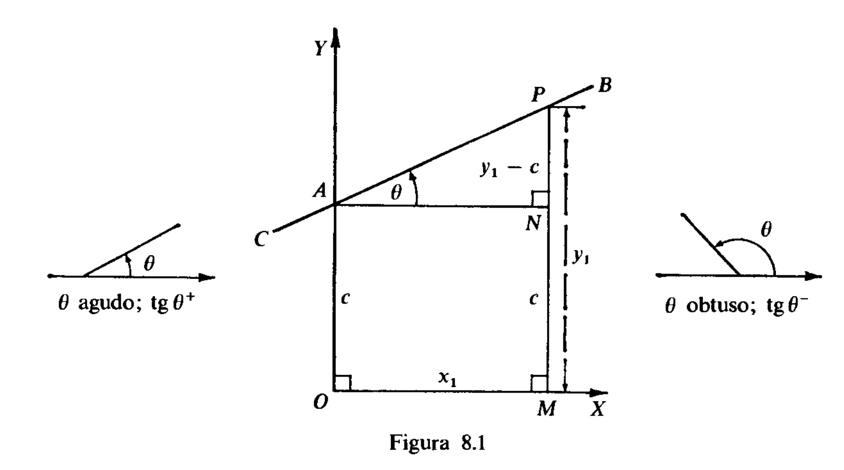


Figura 8.1

Reordenando:

$$y_1 = \operatorname{tg} \theta x_1 + c$$

Si ahora ponemos $\operatorname{tg} \theta = m$ (una constante para la línea recta CB) y señalamos que $OA = c$ también es constante para esta línea, tenemos:

$$y_1 = mx_1 + c$$

donde podemos sustituir (x_1, y_1) por cualquier punto (x, y) sobre la línea. Por tanto, la ecuación general de una línea recta puede ser dada en la forma

$$y = mx + c \tag{1}$$

Esta es llamada la *forma explícita* de la ecuación de la recta. A continuación veremos algunos ejemplos.

Todas las líneas con la misma pendiente, m, son paralelas, en este caso sólo c, corte con el eje OY, puede ser distinto para las diferentes líneas referidas. Considere, por ejemplo:

a) $2x - y - 1 = 0$, que puede escribirse como $y = 2x - 1$;

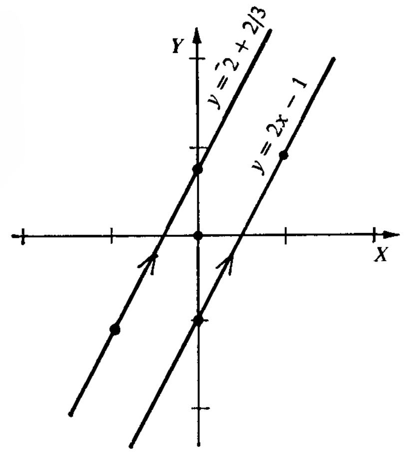


Figura 8.2

b) $3y = 6x + 2$, que puede escribirse como $y = 2x + \frac{2}{3}$ (véase Fig. 8.2).

Todas las líneas con $c = 0$ pasan por el origen. La ecuación se reduce a

$$y = mx$$

Por ejemplo,

c) $3x + 4y = 0$, que puede ponerse como $y = -\frac{3}{4}x$ (θ obtuso).

d) $2x - 5y = 0$, que puede expresarse como $y = \frac{2}{5}x$ (θ agudo).

En estos dos últimos casos, si hacemos $x = 0$, entonces $y = 0$, y así el origen $(0, 0)$ está sobre la línea (Fig. 8.3). Además, las líneas tales como $y = -1{,}5$ y $x = 1$ son paralelas a los ejes X e Y, respectivamente.

Se observará que las líneas obtenidas en la figura 8.2 tienen flechas dibujadas sobre ellas. Esto se hace a menudo en matemáticas, cuando se indican líneas paralelas, pero no siempre es necesario.

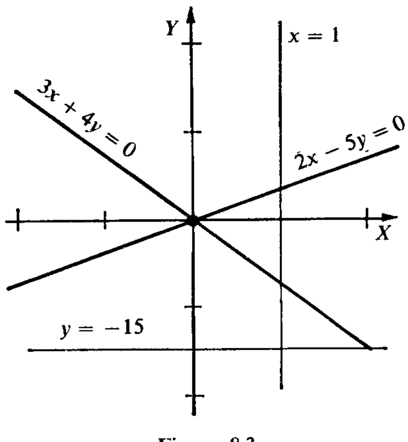


Figura 8.3

EJERCICIO 8.1

1. Exprese las siguientes cuatro líneas en la forma explícita y dibuje cuidadosamente sus gráficas sobre la misma hoja de papel cuadriculado:

a) $2x + y = 3.$
b) $3y - 2x - 6 = 0.$
c) $4x + 2y + 5 = 0.$
d) $4x - 6y - 8 = 0.$

¿Qué interesantes deducciones se pueden hacer?

2. En las líneas $ax + by = 0$ y $bx - ay = 0$, tome cualquier valor fijo para a y uno diferente para b (por ejemplo, $a = 3$, $b = 4$) usando el mismo valor de a y b en ambas líneas. Dibuje las líneas y mida el ángulo entre ellas.

(El resultado es siempre el mismo si una pendiente es b/a y la otra $-a/b$; depende del hecho de que $b/a \times (-a/b) = -1$. La comprobación se da en libros de trigonometría elemental, pero no se necesita aquí.)

2. Programación lineal mediante inecuaciones

Ahora estamos en situación de aplicar nuestros conocimientos de desigualdades a la solución de problemas.

Ejemplo. Dos zapateros, Bill y Tom, hacen zapatos de una calidad especial para la firma de Smith y Co. Bill puede hacer 5 pares de zapatos para hombre y 2 pares de zapatos para mujer en una semana, y Tom puede hacer 2 pares de zapatos para hombre y 6 pares de zapatos para mujer en el mismo tiempo. Una tienda ha encargado a Smith y Co. 50 pares de zapatos para hombres y 63 pares de zapatos para mujer. Bill y Tom trabajan por semanas completas en su empleo, aunque el número de semanas por cada uno no ha de ser necesariamente el mismo (cada uno, de hecho, puede tener tiempo para hacer unos pocos pares de zapatos extras para completar su última semana de trabajo, pero en Smith y Co. creen que ellos pueden disponer de los sobrantes por un moderado descuento). A Bill se le paga 60 libras por semana y Tom recibe 64 libras por el mismo tiempo. El total de salarios pagados será tan económico como sea posible, conformes a completar el pedido. Encuentre el número de semanas que trabajará cada hombre y el montante a recibir.

Suponga ahora que antes de comenzar el trabajo, el sueldo de Bill se incrementa a 65 libras por semana. ¿Afecta esto al número de semanas que cada hombre necesita trabajar ahora?

Sea x e y el número de semanas que Bill y Tom trabajan, respectivamente. Entonces el número de pares de zapatos hechos es como sigue:

	Zapatos de hombre	Zapatos de mujer
Bill	$5x$	$2x$
Tom	$2y$	$6y$
Total	$5x + 2y$	$2x + 6y$

Estas expresiones llevan a dos inecuaciones, dado que el número de pares de zapatos de hombre y mujer deben ser al menos de 50 y 63, respectivamente. Por tanto,

$$5x + 2y \geqslant 50 \tag{2}$$

$$2x + 6y \geqslant 63 \tag{3}$$

Hay que considerar otras dos inecuaciones, porque el número mínimo de semanas que Bill o Tom pueden trabajar es 0:

$$x \geqslant 0 \tag{4}$$

$$y \geqslant 0 \tag{5}$$

En realidad, en este caso (4) y (5) no afectan al resultado deducido del dibujo de la figura 8.4 sobre el cual se representan las inecuaciones, pero constituyen parte de los límites del área sombreada que nosotros estamos considerando.

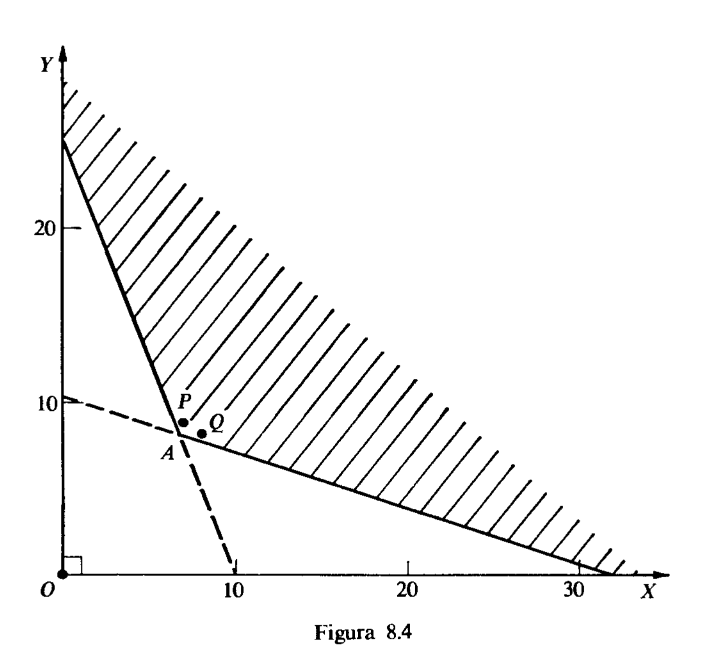


Figura 8.4

Las líneas límite son:

(2a) $5x + 2y = 50$, de la cual fueron elegidos los puntos (0, 25) y (10, 0).

(3a) $2x + 6y = 63$, de la cual fueron elegidos (0, 10,5) y (31, 5, 0).

(4a) $y = 0$ (eje X).

(5a) $x = 0$ (eje Y).

El pedido solamente puede ser completado dentro del área sombreada, y debe serlo tan cerca como sea posible al punto A, donde (2a) y (3a) se cortan, de acuerdo con las condiciones acerca del número de semanas utilizadas y los salarios a pagar. (A puede ser hallado resolviendo (2a) y (3a) juntas; sus coordenadas son $(87/13, 215/26)$, pero es claro desde el gráfico que no da un número entero de semanas para x e y.) Los puntos más cercanos a A, dentro del área sombreada que tienen la propiedad de poseer un número entero de coordenadas son $P(7, 9)$ y $Q(8, 8)$.

Caso 1 (usando P): Bill trabaja siete semanas y Tom trabaja nueve semanas. Total de salarios:

$$(7 \times 60 + 9 \times 64) = (420 + 576) = 996 \text{ libras}$$

Caso 2 (usando Q): ambos, Bill y Tom, trabajan ocho semanas. Total de salarios:

$$8(60 + 64) = 8 \times 124 = 992 \text{ libras}$$

Por tanto, es más económico usar a Bill y Tom cada uno ocho semanas; el primero recibirá 480 libras y el segundo 512.

Nota: En este caso, el mejor uso de Bill y Tom fue darles períodos iguales de trabajo, pero no debe asumirse que éste sea necesariamente el caso.

Veamos ahora la situación cuando el salario de Bill es de 65 libras por semana y el de Tom se mantiene en 64 libras. ¡Se supone que el último no irá a la huelga! Los puntos $P(7, 9)$ y $Q(8, 8)$ no son afectados, al estar relacionados con los períodos de empleo; son independientes de los salarios pagados.

Caso 3 (usando P): Bill trabaja siete semanas y Tom nueve semanas. Total de salarios:

$$(7 \times 65 + 9 \times 64) = 1.031 \text{ libras}$$

Caso 4 (usando Q): Bill y Tom trabajan ocho semanas cada uno. Total de salarios:

$$8(65 + 64) = 1.032 \text{ libras}$$

Por tanto, es más económico que Bill trabaje siete semanas y Tom trabaje nueve semanas. (En la vida real el beneficio conseguido sobre los diferentes números de pares de zapatos sobrepasaría grandemente tan trivial diferencia; sin embargo, pueden darse casos donde la consideración de diferentes salarios y períodos de empleo para propósitos específicos estén relacionados con el gasto.)

Ejemplo. Un pequeño teatro tiene 250 asientos en un solo piso. Los de la parte delantera son de platea y el resto para butacas de principal. La compañía del teatro mantiene un contrato aplicable a cada representación.

a) Pueden ser vendidas hasta 50 entradas de platea sin necesidad de expedir entradas de principal, pero cualquier venta adicional de las primeras no debe exceder en número a la cuarta parte de las ventas de las últimas.

b) Los precios de platea y principal, respectivamente, son 2,50 y 1,50 libras. Encuentre gráficamente el mayor número de butacas de platea que pueden ser vendidas en: 1) un lleno completo; 2) una sesión con 150 personas de audiencia. Encuentre también las correspondientes ganancias totales.

Sea x el número de butacas de principal vendidas, e y el correspondiente número de los de platea (las tomamos en este orden, ya que usaremos el eje OY para encontrar algunos resultados).

La máxima capacidad de asientos es 250, caso (1):

$$x + y \leqslant 250 \tag{6}$$

De *a*) vemos que una vez vendidas 50 plateas, cualquier incremento en el número de éstas debe ser menor o igual que $x/4$:

$$y \leqslant 50 + \frac{x}{4} \tag{7}$$

Hay otras dos restricciones adicionales, surgidas del hecho de que el número de asientos de ambos tipos no puede ser menor que cero:

$$x \geqslant 0 \tag{8}$$

$$y \geqslant 0 \tag{9}$$

Los casos $x = 0$ o $y = 0$, o ambos, pueden darse porque quizá ningún asiento sea vendido en una u otra clasificación, o en ambas (en el tercer caso, el teatro probablemente cerrará, a menos que se trate de una función de caridad, ¡con entrada gratuita!).

Ahora examinaremos la región correspondiente al conjunto S_1, que está dado por la intersección de los cuatro conjuntos relacionados con las inecuaciones (6) a (9) anteriores:

$$S_1 = \left\{(x, y): x + y \leqslant 250\right\} \cap \left\{(x, y): y \leqslant 50 + \frac{x}{4}\right\} \cap$$
$$\cap \{(x, y): x \geqslant 0\} \cap \{(x, y): y \geqslant 0\}$$

(véanse Aps. 7.4 y 7.5), que puede ser convenientemente abreviado como:

$$S_1 = \left\{(x, y): x + y \leqslant 250;\ y \leqslant 50 + \frac{x}{4};\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0\right\}$$

El límite del área que nosotros necesitamos está dada por las cuatro líneas:

$$x + y = 250 \quad ; \quad y = \frac{x}{4} + 50 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad y = 0$$

donde, por cierto, $y = 0$ es el eje X, y $x = 0$ es el eje Y.

El área encerrada por el cuadrilátero $OABC$, en la figura 8.5, da el conjunto solución que hemos estado buscando. Observe que este conjunto incluye las líneas límite OA, AB, OC y CB.

Puntos convenientes para $x + y = 250$ serán (0, 250) y (250, 0); para $y = x/4 + 50$, podrían ser (0, 50) y (200, 100).

El eje horizontal, OX, mide el número de entradas de principal vendidas y el eje vertical, OY, el número de entradas de platea vendidas; es el último por el que se nos pregunta, y, por tanto, necesitamos el punto más alto (esto es, en la dirección creciente de OY) del cuadrilátero $OABC$. Este punto es el vértice B, cuyas coordenadas son (160, 90).

Por tanto, el mayor número de butacas de platea que puede venderse en un lleno es de 90.

Así, los ingresos máximos para un completo son de 90 asientos de 2,50 libras y 160 asientos de 1,50 libras, esto es:

$$(90 \times 2{,}50 + 160 \times 1{,}50) = 465 \text{ libras}$$

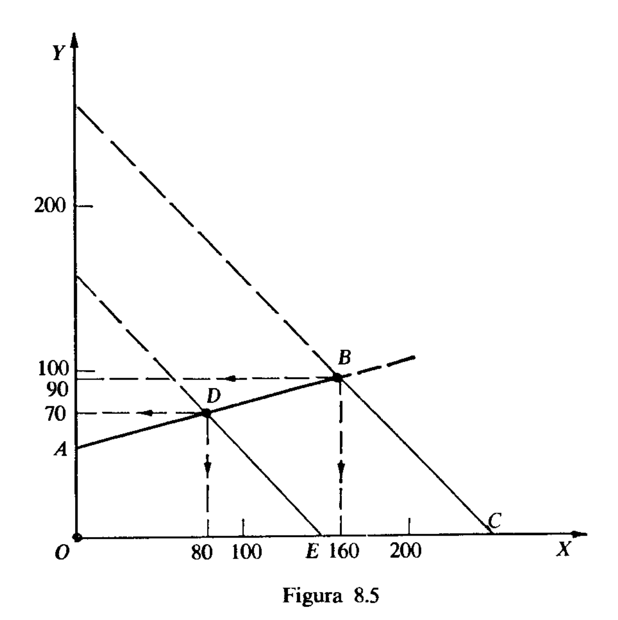


Figura 8.5

Consideremos ahora el caso 2. La única diferencia en la construcción de nuestro diagrama es, en este caso, que la inecuación (6) se convierte en la (6a), más abajo, mientras que (7), (8) y (9) se mantienen como antes:

$$x + y \leqslant 150 \tag{6a}$$

Esto nos lleva al conjunto S_2, donde

$$S_2 = \left\{(x, y): x + y \leqslant 150;\ y \leqslant 50 + \frac{x}{4};\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0\right\}$$

En la figura 8.5 solamente necesitamos dibujar una línea más, $x + y = 150$, que da el cuadrilátero más limitado *OADE*, del cual necesitamos el vértice *D*, el punto más alto en la dirección de y creciente. *D* tiene de coordenadas (80, 70).

Por tanto, el mayor número de butacas de platea en una sesión de 150 espectadores es de 70.

Los ingresos correspondientes son de

$$(70 \times 2{,}5 + 80 \times 1{,}50) = 295 \text{ libras}$$

Desarrollemos este ejemplo para cualquier número de uno u otro tipo de asientos, dentro de las limitaciones de la licencia, usando una aproximación gráfica para encontrar los ingresos.

Expresados algebraicamente, los ingresos por x butacas de principal e y butacas de platea serán t libras, donde

$$1{,}5x + 2{,}5y = t$$

esto es,

$$5y = -3x + 2t$$

o, en la forma explícita,

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}t \qquad (10)$$

Si ahora refrescamos nuestra memoria volviendo a la ecuación (1), inmediatamente se hará claro que el término $2/5t$ es el corte de la recta (10), anterior, con el eje OY.

Esto es muy útil, ya que significa que si tomamos un punto P, cuyas coordenadas son enteras, dentro o en el borde de $OABC$, y pasando por P dibujamos una línea de pendiente $-3/5$ cortando a OY en Q, entonces la ordenada en el origen OQ (que es $2/5t$) solamente ha de ser multiplicada por $5/2$ para dar los ingresos en libras para la sesión referida.

Veamos un ejemplo para diferentes puntos $P_1, P_2, ..., P_5$.

Número de entradas vendidas en cinco sesiones diferentes:

Entradas vendidas / Día	Principal	Platea	Punto	Coordenadas
1	0	30	P_1	(0, 30)
2	100	0	P_2	(100, 0)
3	60	65	P_3	(60, 65)
4	150	60	P_4	(150, 60)
5	200	50	P_5	(200, 50)

Comencemos por dibujar una línea P con esta pendiente. Supóngase que tiene por ecuación

$$y = \frac{3}{5}x + 120$$

la cual tiene sobre sí los puntos convenientes $P(200, 0)$ y $Q(0, 120)$.

Los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_5$, dados por las coordenadas de la tabla anterior, se señalan en la figura 8.6, donde el cuadrilátero $OABC$ es el mismo que en la figura 8.5. Las líneas $P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_5Q_5$ se dibujan cortando al eje OY en $Q_1, Q_2, \ldots, Q_5$, respectivamente; todas estas rectas se dibujan paralelas a PQ (y, por consiguiente, con una pendiente de $-3/5$).

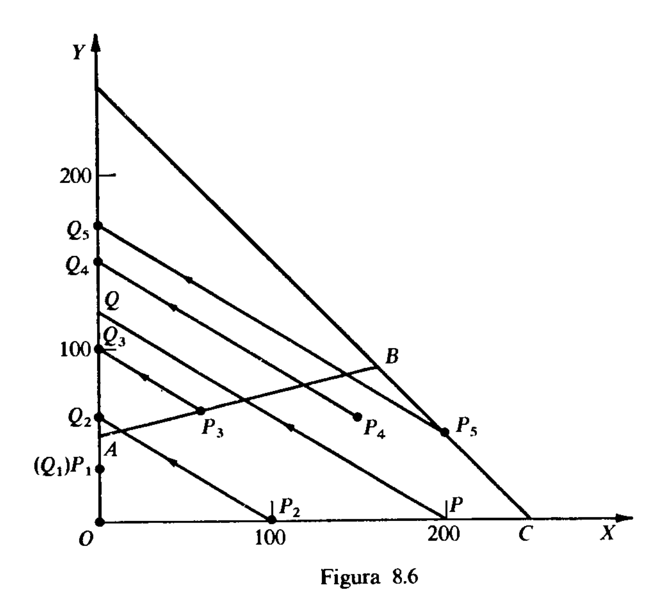


Figura 8.6

Uno de los modos más fácil de dibujar una serie de rectas paralelas a otra dada, es mediante el uso de dos escuadras, deslizando una a lo largo de la otra que es mantenida fija, después de alinear la escuadra móvil con la recta original (PQ en nuestro caso) (Fig. 8.7).

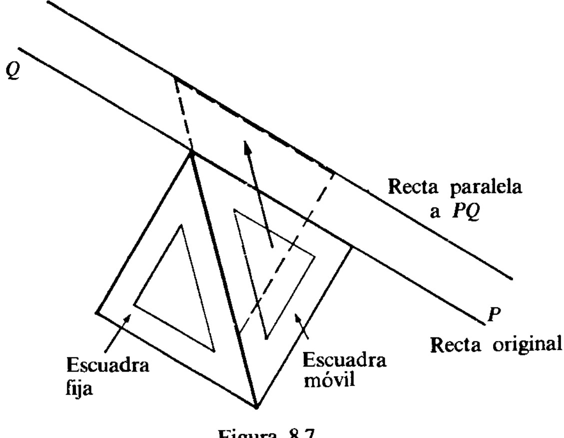


Figura 8.7

Nota: Esto proporcionaría P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4, P_5Q_5, Se observará que P_1 y Q_1 coinciden, lo cual se debe a que $P_1(0, 30)$ ya estaba situado en el eje OY.

El lector puede haber observado ya que los cinco puntos $(P_1, P_2, ..., P_5)$ están situados uno en cada vértice del cuadrilátero $OABC$ y otro dentro de él.

Leyendo las longitudes de $OQ_1, OQ_2, ..., OQ_5$, podemos deducir inmediatamente las ganancias, pero como la figura 8.6 es bastante pequeña, estas lecturas serán sólo aproximadas en algunos casos:

		Ingresos en libras	
Día	OQ	Del diagrama $5/2 \cdot OQ$	Calculados de la tabla anterior
1	30	75	75
2	60	150	150
3	100	250	252,50
4	148	370	375
5	172	430	425

Aunque el diagrama es bastante menos preciso, es muy útil en el desarrollo de las ideas de *programación lineal*. Esta denominación viene de que es: a) *programación*, indicando que se dan pasos

lógicos, análogos a aquellos mediante los cuales un ordenador resolverá el problema, aunque tal máquina no utilizaría necesariamente una aproximación gráfica para parte de la solución, y b) *lineal* (de una dimensión) refiriéndose a que todas las ecuaciones e inecuaciones son de primer grado (esto es, no hay términos tales como x^2, y^2, xy, o potencias mayores, de las variables (x, y)).

EJERCICIO 8.2

1. Un artesano iraquí del metal hace dos tipos de jarrones ornamentales, usando latón brillante y cobre en el proceso. El primer tipo, conteniendo 500 g de cobre y 300 g de latón, vendido a 5 dinares. El segundo tipo, conteniendo 300 g de cobre y 600 g de latón, vendido a 4 dinares. En el almacén tiene 12 kg de cobre y 15 kg de latón. Encuentre gráficamente el número de jarrones de cada tipo a ser realizados, de forma que reciba el máximo de ganancias posibles y determine también esta cantidad [1.000 gramos (g) = = 1 kilogramo (kg)].

2. Dos tipos de té, comercializados bajo las marcas de Charmin y Teasham, son fabricados con productos de Foopong, Lotang y Napoo, tres plantaciones del Lejano Oriente. Charmin contiene tres partes de Foopong, dos de Lotang y cinco de Napoo; Teasham contiene cuatro partes de Foopong, cinco de Lotang y dos de Napoo. El fabricante tiene que manejar 18 kg de Foopong, 20 kg de Lotang y 15 kg de Napoo. Ambos, Charmin y Teasham, se venden en bolsas de 1 kg, el primero a 1,80 libras y el segundo a 1,60 libras la bolsa. Encuentre gráficamente el número de bolsas completas de cada tipo que deben ser fabricadas para asegurar que sea conseguido el máximo beneficio, suponiendo que se venden todas las bolsas. ¿Cuál es el máximo beneficio? (Puede haber un pequeño sobrante de té.)

3. Una compañía privada de ferrocarriles en el Estado de Utopía trabaja con trenes pequeños que prestan un servicio directo entre la capital y un popular lugar costero. La compañía tiene una licencia que incluye las siguientes restricciones para cada viaje de tren:

a) Pueden viajar pasajeros de 1.ª y 2.ª clase, pero en total no deben superar los 200.

b) Pueden ser expedidos hasta 40 billetes de 1.ª clase sin necesidad de vender ninguno de 2.ª clase, pero el número de billetes de 1.ª clase vendidos a partir de éstos no puede superar la tercera parte del número de los de 2.ª clase.
c) Un billete sencillo cuesta 90 M para 1.ª y 54 para 2.ª (la unidad monetaria es el more, M).

Encontrar, gráficamente, el mayor número de asientos de 1.ª clase que se pueden dar en un tren y determinar también el máximo de ganancias de un viaje, si el tren va lleno (no olvide los pasajeros de 2.ª clase).

Si, en otro viaje, el número de pasajeros de 1.ª clase es igual al de los de 2.ª, siendo el número de los de 1.ª tan alto como está permitido en este ejemplo, encuentre los ingresos (sobre el mismo dibujo).

9 Teoría de conjuntos

9.1. Fórmulas generales

Antes de ampliar el trabajo de los capítulos anteriores, indicaremos algunos resultados generales de importancia:

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$
$A \cup E = E$	$A \cap E = A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Los primeros cuatro pares de fórmulas son casi obvios. Los otros dos pares son generalizaciones de los resultados del ejercicio 6.4, cuestión 5, del capítulo 6.

Aunque no es necesario tener que recurrir a los diagramas de Venn para demostrar estas fórmulas, le aconsejamos que dibuje algunos diagramas para ilustrar varios de los resultados.

Damos a continuación una demostración matemática de una de las fórmulas para enseñar el método utilizado. Es de fácil demostración, pero necesita de una cuidadosa atención para apreciar sus pormenores.

Teorema. Si A, B y C son tres conjuntos dados, probar que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea x un elemento de un conjunto. Entonces,

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C, \text{ o a ambos}) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \in C), \text{ o ambos} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ o } (x \in A \cap C), \text{ o ambos} \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

El punto delicado en esta demostración es el mantenimiento del «o ambos» en tres líneas sucesivas. Existen formas más elegantes de realizar la demostración, pero no son tan fáciles de seguir.

De igual modo,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Si consideramos $A \cap B \cap C$, de hecho estamos pensando que $\{x : x \in A, B \text{ y } C\}$ y no importa en qué origen tomemos A, B y C. No es necesario, por tanto, escribir los paréntesis en $A \cap (B \cap C)$ o en cualquier otra permutación de este tipo. El diagrama de Venn (Fig. 9.1) lo evidencia; el área sombreada será $A \cap B \cap C$.

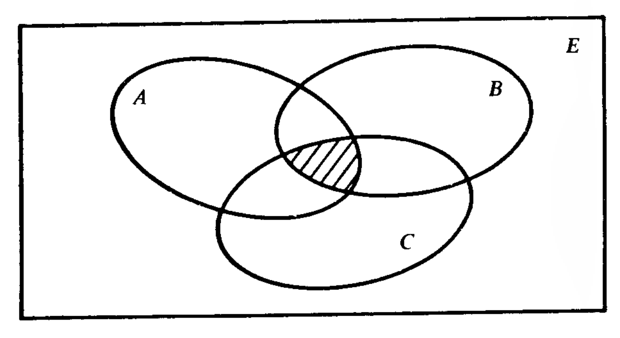


Figura 9.1

9.2. Intersección y unión de tres conjuntos

Igualmente, si consideramos $A \cup B \cup C$, podemos omitir los paréntesis, tal como en $A \cup (B \cup C)$, para $\{x : x \in A \text{ o } B \text{ o } C, \text{ o a dos de ellos o a los tres conjuntos}\}$ y el orden en que escribamos A,

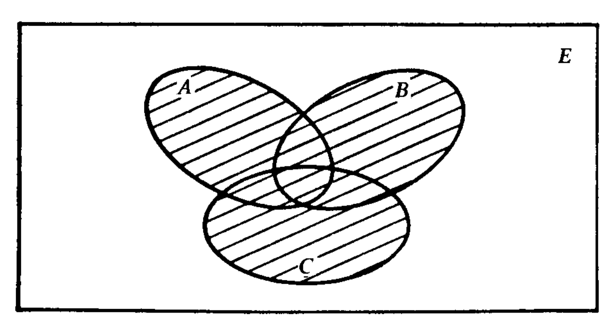


Figura 9.2

B y C no tiene importancia. El área sombreada en la figura 9.2 representa $A \cup B \cup C$.

Es fácil deducir dos simples resultados más:

$$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$$

$$(A \cup B) \cup (A \cup C) = A \cup B \cup C$$

Probaremos el primero.

Sea x un elemento del conjunto del miembro de la izquierda de la primera ecuación. Entonces:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{y} \quad x \in B$$

pero también

$$x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in A \quad \text{y} \quad x \in C$$

$$x \in (A \cap B) \cap (A \cap C) \Leftrightarrow x \in A \quad \text{y} \quad x \in B \quad \text{y} \quad x \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B \cap C$$

Y el resultado es inmediato.

EJERCICIO 9.1

1. Simplificar: *a*) $A \cup (B \cap A)$; *b*) $A \cap (B \cup A)$.

Mediante métodos similares a los empleados en el apartado 9.1, probar del 2 al 4 que:

2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $(A \cup B) \cup (A \cup C) = A \cup B \cup C$.
4. $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.
5. Simplificar: *a*) $[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap [A \cup B]$

   b) $[(A \cup B) \cap (A \cup C)] \cup [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$.

[*Sugerencia:* Serán de ayuda algunos esquemas.]

9.3. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Supóngase que deseamos encontrar el m.c.d. y el m.c.m. de los números 210, 595 y 770. Sean A, B y C los conjuntos de sus respectivos factores primos. Tendremos:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad ; \quad 595 = 5 \cdot 7 \cdot 17 \quad ; \quad 770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \quad ; \quad B = \{5, 7, 17\} \quad ; \quad C = \{2, 5, 7, 11\}$$

Los factores del m.c.d. son los elementos de $A \cap B \cap C$, esto es, sólo aquellos elementos comunes a los tres conjuntos A, B y C. Así:

$$A \cap B \cap C = \{5, 7\}$$

$$\text{m.c.d.} = 5 \cdot 7 = 35$$

Análogamente, $A \cup B \cup C$ nos da los factores del m.c.m. Así,

$$A \cup B \cup C = \{2, 3, 5, 7, 11, 17\}$$

$$\text{m.c.m.} = 39.270$$

Se presenta una dificultad cuando hay factores repetidos en los números de los que estamos buscando el m.c.d. y el m.c.m., por lo cual nos vemos en la necesidad de ser capaces, en matemáticas, de distinguir entre elementos de un conjunto (Ap. 6.2). Salvaremos este escollo mediante la introducción de subíndices.

Considere los números 24, 28 y 45. Tendremos[1]:

$$24 = 1 \cdot 2_a \cdot 2_b \cdot 2_c \quad ; \quad 28 = 1 \cdot 2_a \cdot 2_b \cdot 7 \quad ; \quad 45 = 1 \cdot 3_a \cdot 3_b \cdot 5$$

Usando la notación anterior:

$$A \cap B \cap C = 1$$

esto es, A, B y C no tienen factores comunes (salvo la unidad):

$$\text{m.c.d.} = 1$$

$$A \cup B \cup C = \{2_a, 2_b, 3_a, 3_b, 5, 7\}$$

$$\text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2.520$$

Ejemplo. Encuentre el m.c.d. y el m.c.m. de $6a^2b$, $3a^3c$, $8abc^2$. Tendremos:

$$A = \{2_1, 3, a_1, a_2, b\}$$

$$B = \{3, a_1, a_2, a_3, c_1\}$$

$$C = \{2_1, 2_2, 2_3, a_1, b, c_1, c_2\}$$

$$A \cap B \cap C = \{a_1\}$$

esto es, m.c.d. $= a$. También,

$$A \cup B \cup C = \{2_1, 2_2, 2_3, 3, a_1, a_2, a_3, b, c_1, c_2\}$$

esto es,

$$\text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot b \cdot c^2 = 24a^3bc^2$$

Claramente, en un ejemplo de esta clase, la solución por álgebra común es más corta, pero el método anterior conlleva los razonamientos lógicos subyacentes en la teoría de conjuntos.

[1] Pondremos el factor 1 solamente cuando no exista otro factor común.

EJERCICIO 9.2

Encontrar, utilizando métodos similares a los anteriores, el m.c.d. y el m.c.m. de

1. *a*) 1.155, 462, 560; *b*) 42, 48, 72, 102.
2. *a*) x^2yz, y^3z^2, x^3z; *b*) $6a^3bc$, $16ac^2$, $30b^2c^2$.
3. $4a^2 - 4ab$, $6ab - 6b^2$. [*Sugerencia:* Factorizar la expresión.]
4. 512, 768, 1.536.

9.4. El complementario de un conjunto

Si E es el conjunto universal y si A es un conjunto dentro de E, entonces el complementario de A es A' y viene dado por

$$A \cup A' = E$$

Así, A' contiene todos los elementos de E que no son de A, y viceversa.

De ahí que si $x \in A \Rightarrow x \notin A'$; por tanto, A y A' no tienen elementos comunes. En el diagrama de Venn (Fig. 9.3) la situación se entiende claramente.

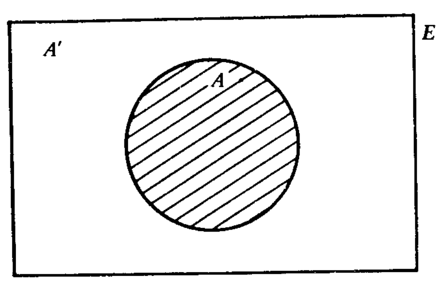


Figura 9.3

Por tanto,

$$A \cap A' = \phi \quad \text{y} \quad A \cup A' = E$$

Teoremas

1) $A' \cap B' = (A \cup B)'$
2) $A' \cup B' = (A \cap B)'$

donde $(A \cup B)'$ y $(A \cap B)'$ son los conjuntos complementarios de $(A \cup B)$ y $(A \cap B)$, respectivamente.

Daremos una demostración intuitiva de 1) empleando los diagramas de Venn, para demostrarlo formalmente a continuación. El teorema 2) puede ser probado de forma análoga y se deja para el lector, en el ejercicio 9.2. Esdos dos teoremas son conocidos como *leyes de Morgan.*

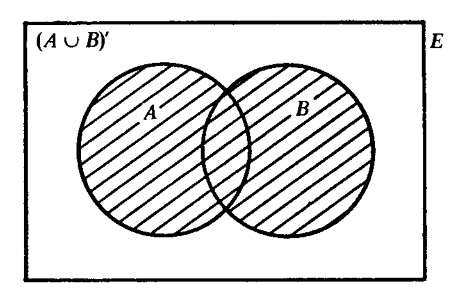


Figura 9.4

En la figura 9.4, $A \cup B$ está sombreado y, por tanto, $(A \cup B)'$ es el área sin sombrear. En la figura 9.5, el área de trama cuadriculada es $A' \cap B'$ (ya que la figura tiene dos círculos solapados, A y B; el complementario de A, esto es, A', está rayado de arriba derecha a abajo izquierda; el complementario de B, esto es, B', está

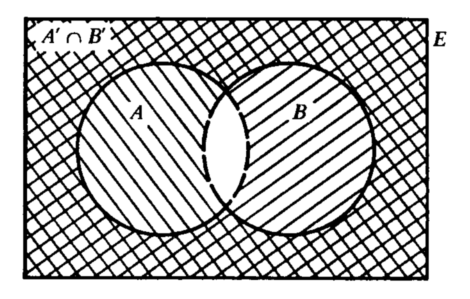


Figura 9.5

rayado de arriba izquierda a abajo derecha; su intersección $A' \cap B'$ es, por tanto, la región de tramas cruzadas de E). Así, el área no rayada de la figura 9.4 es la misma que el área de tramas cruzadas de la figura 9.5:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

No es necesario que A y B se solapen (esto es, que tengan elementos comunes), pero en este caso la demostración sería casi trivial.

Damos ahora una demostración teórica. Sea x elemento de un conjunto. Entonces:

$$\begin{aligned} x \in (A' \cap B') &\Leftrightarrow (x \in A') \text{ y } (x \in B') \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \text{ y } (x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \notin (A \text{ o } B \text{ o ambos}) \\ &\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B)' \end{aligned}$$

Por tanto,

$$A' \cap B' = (A \cup B)'$$

Concluiremos este apartado con un problema más difícil, demostrándolo mediante diagramas de Venn.

Teorema. $(A \cap B)' = (A' \cap B') \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Consideremos la expresión del lado derecho. Conocemos ya que $A' \cap B'$ es el área de tramas cruzadas en la figura 9.5. Ahora, $A \cap B'$ y $A' \cap B$ son las áreas rayadas en las figuras 9.6 y 9.7, respectivamente (las direcciones de los rayados son las mismas que en la figura 9.5).

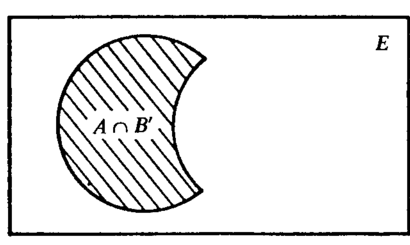


Figura 9.6

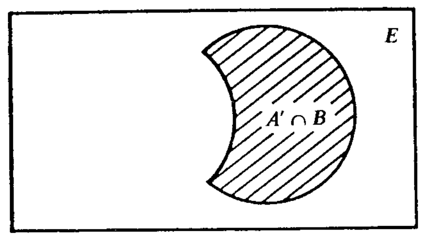


Figura 9.7

Por consiguiente, la unión de $A' \cap B'$, $A \cap B'$ y $A' \cap B$ es el área rayada de la figura 9.8.

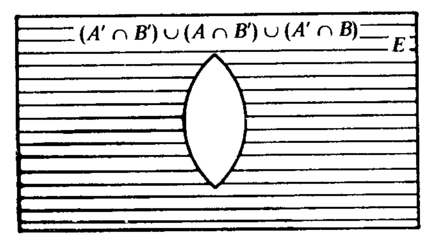


Figura 9.8

Vemos enseguida que éste es el complementario de $A \cap B$, el área rayada en la figura 9.9. Por tanto, el teorema se ha demostrado como verdadero.

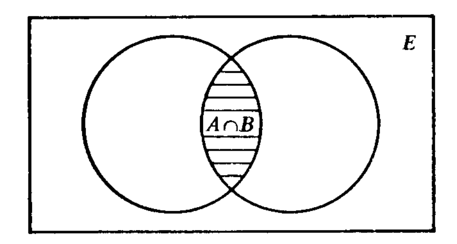


Figura 9.9

Los métodos utilizados en este capítulo están basados en el trabajo (publicado en 1854) del matemático inglés George Boole (muerto en 1864), y es conocida esta materia como *álgebra de Boole.* Aunque olvidada por más de un siglo, el desarrollo de los

ordenadores electrónicos ha conducido a un repentino renacimiento del interés por sus estudios, dado lo propicio de esta teoría para las necesidades de estas máquinas.

EJERCICIO 9.3

1. A y B son dos conjuntos de puntos incluidos en los círculos que se cortan (Fig. 9.10) y el conjunto universal. Dibuje los diagramas y sombréelos, señalando: *a)* $A \cap B'$; *b)* $A' \cup B$; *c)* $A' \cap B'$; *d)* $A' \cup B'$; *e)* $(A \cup B)'$.

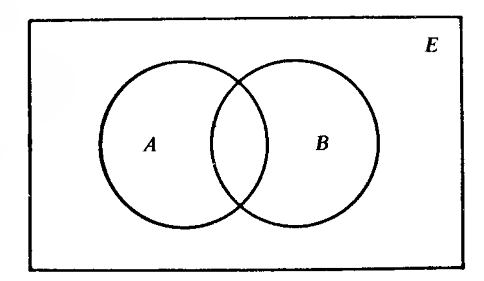


Figura 9.10

2. A y B son los conjuntos de puntos dentro del triángulo y círculo, respectivamente, en la figura 9.11. E es el conjunto universal. Dibuje diagramas separados y sombréelos apropiadamente para representar: *a)* $A \cup B'$; *b)* $(A \cup B)'$; *c)* $A \cap B'$; *d)* $(A \cap B)'$; *e)* $(A' \cap B)$.

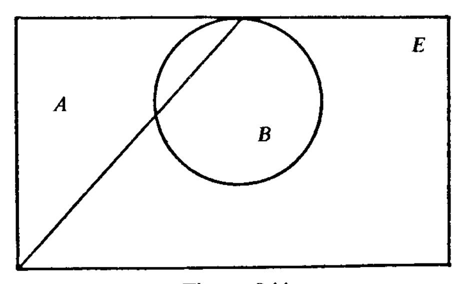


Figura 9.11

3. Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 6, 7\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, escriba: *a)* A'; *b)* B'; *c)* $A' \cap B'$; *d)* $A' \cup B'$; *e)* $A \cap B'$; *f)* $(A \cup B)'$; *g)* $(A \cap B)'$.

4. Pruebe que $A' \cup B' = (A \cap B)'$: *a*) mediante diagramas de Venn; *b*) teóricamente.

5. Demuestre[2], utilizando los diagramas de Venn, que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6. Siendo E el conjunto universal $\{a, b, c, d, e, f\}$ y $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ y $C = \{a, b, e, f\}$, subconjuntos de E, encuentre el conjunto $(A' \cap B) \cup (A \cap B')$. ¿Qué observa?

7. Una encuesta sobre 119 personas que tomaron un tren para Londres, dio la siguiente útil información: 60 iban a un partido de fútbol, 55 iban a un espectáculo nocturno y 90 salían para cenar. De éstos, 48 iban al espectáculo y a cenar, 37 al partido y a cenar. De estos grupos subsidiarios, 10 iban a los tres sitios. Si cuatro de los encuestados no iban a hacer ninguna de estas cosas, encuentre cuántos iban: *a*) al fútbol solamente; *b*) al fútbol y al espectáculo, pero no a cenar.

El problema es resuelto a continuación. Sea:

$$D = \{\text{Los que van a cenar}\}$$
$$F = \{\text{Los que van al fútbol}\}$$
$$S = \{\text{Los que van al espectáculo}\}$$

El conjunto universal E tiene 119 elementos. Dibujado en un diagrama de Venn, obtenemos la representación de la figura 9.12.

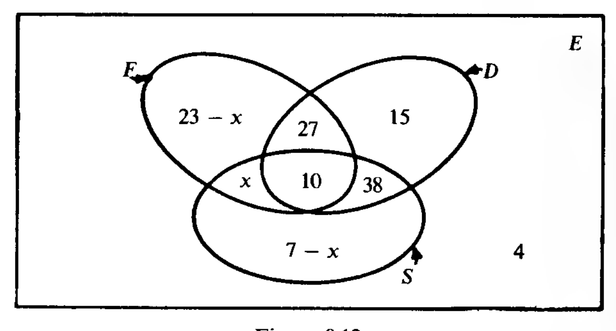


Figura 9.12

[2] La demostración teórica se pidió en el ejercicio 8.1

Tendremos card $(F \cap D \cap S) = 10$, como primer paso. También card $(F \cap D) = 37$. Por tanto, el número de elementos que están en $F \cap D$, pero no en $F \cap D \cap S$, será $37 - 10 = 27$, que es introducido también en el diagrama. Procediendo de forma similar, tendremos card $(D \cap S) = 48$ y card $(F \cap D \cap S) = 10$; por tanto, el número

$$\text{card}(D \cap S) - \text{card}(F \cap D \cap S) = 48 - 10 = 38$$

Éste también es introducido en el diagrama. Podemos ahora completar D, para el resto de los comensales; será: $90 - 27 - 38 - 10 = 15$. La dificultad en el problema es ahora clara. No conocemos $F \cap S$. Pondremos x en la parte de $F \cap S$ que no está en $F \cap D \cap S$, esto es, $x = \text{card}(F \cap S) - \text{card}(F \cap D \cap S)$.

Entonces, los elementos que quedan en F y no pertenecen ni a D ni a S serán:

$$60 - 27 - x - 10 = 23 - x$$

Y los que quedan en S que no pertenecen ni a F ni a D serán:

$$55 - 38 - x - 10 = 7 - x$$

Esto también se pone en el diagrama de Venn. Todo lo que es necesario hacer ahora es sumar los elementos de la figura 9.12 e igualar el resultado al número de personas implicadas ($119 - 4 = 115$). Esto nos dará x. Se deja al lector demostrar que $x = 5$ (el número de personas que van al fútbol y al espectáculo, pero no a cenar). ¿Cuál es el número de personas que van solamente al partido?

8. En cierta escuela se realizan exámenes de aptitud: 23 candidatos se examinan de literatura inglesa y 29 de historia. Algunos se examinan de geografía, 10 candidatos están examinándose de literatura inglesa, 15 solamente de historia, 6 de literatura inglesa e historia solamente, 4 de geografía y literatura inglesa solamente, y 10 de geografía solamente. *a*) ¿Cuántos candidatos están examinándose de geografía? *b*) ¿Cuántos candidatos están examinándose de las tres asignaturas a la vez? *c*) ¿Cuántos en total están realizando exámenes?

9.5. Diferencia simétrica

Definimos la diferencia simétrica de dos conjuntos A y B como la unión del conjunto de elementos que están en A pero no en B, junto con aquellos que están en B pero no en A. Simbólicamente, esto se escribe $A \Delta B$.

Sobre el diagrama de Venn (Fig. 9.13), podemos ver el área sombreada.

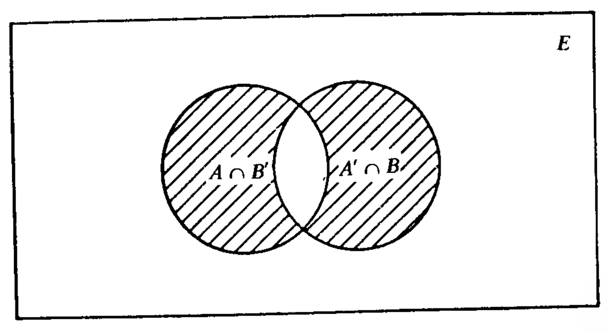


Figura 9.13

El conjunto de elementos de A pero no de B es $A \cap B'$, y el conjunto de los de B pero no de A es $A' \cap B$:

$$A \Delta B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$$

Esto se representa por el área rayada de la figura 9.13. Aunque es posible utilizar la notación de conjuntos ya explicada, es más fácil utilizar la fórmula de la diferencia simétrica después de dominar la notación abreviada que veremos en el apartado siguiente.

9.6. Notación abreviada

Será sencillo llegar a la conclusión de que la notación del álgebra de Boole es más bien aburrida de escribir.

En consecuencia, introduciremos un simbolismo ampliamente usado, que parece similar al del álgebra común. Es, sin embargo,

un asunto de reglas lo que diferencia este simbolismo del del álgebra. La nueva notación no fue mencionada antes, ya que era necesario que el lector manejara con soltura la teoría de conjuntos antes de utilizar abreviaturas.

Sustituiremos $A \cap B$ por AB y $A \cup B$ por $A + B$. También sustituiremos 1 por E (el conjunto universal) y 0 por ϕ (el conjunto vacío). Nuestros resultados generales se modifican así:

	Notación de conjuntos	*Notación abreviada*	
1.	$A \cup A = A$	$A + A = A$	
2.	$A \cup B = B \cup A$	$A + B = B + A$	*
3.	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$	*
4.	$A \cap A = A$	$AA = A$	
5.	$A \cap B = B \cap A$	$AB = BA$	*
6.	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A(BC) = (AB)C$	*
7.	$A \cup \phi = A$	$A + 0 = A$	*
8.	$A \cap \phi = \phi$	$A \cdot 0 = 0$	*
9.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A(B + C) = AB + AC$	*
10.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A + BC = (A + B)(A + C)$	
11.	$A \cup E = E$	$A + 1 = 1$	
12.	$A \cap E = A$	$A \cdot 1 = A$	*
13.	$A \cup A' = E$	$A + A' = 1$	
14.	$A \cap A' = \phi$	$AA' = 0$	

Los ocho resultados, cada uno de los que llevan un asterisco al lado, son similares a los del álgebra común. Los seis resultados que no lo llevan requieren cuidado, pero son fácilmente comprensibles mediante la visualización de los correspondientes diagramas de Venn. De estos 14 resultados, el más difícil de ver es el número 10. Se aconseja al lector memorizar todos éstos tan rápidamente como sea posible.

Ejemplo. Pruebe que, en el álgebra booleana:

$$(A + B)(B + C)(C + A) = BC + CA + AB$$

Tendremos:

$$
\begin{aligned}
(A+B)(B+C)(C+A) &= [(A+B)(A+C)](B+C) = && \text{(Resultados 2 y 5)}\\
&= (A+BC)(B+C) = && \text{(Resultado 10)}\\
&= AB+AC+B^2C+BC^2 = && \text{(Resultados 9 y 5)}\\
&= AB+AC+BC+BC = && \text{(Resultado 4)}\\
&= AB+BC+CA && \text{(Resultados 1 y 2)}
\end{aligned}
$$

($BC + BC = BC$, porque todos los elementos de BC están sencillamente repetidos).

Una vez que se haya adquirido familiaridad con esta notación, no será necesario dar explicaciones.

EJERCICIO 9.4

Simplificar las expresiones de los apartados 1 a 14:

1. $A + (A + B)$. **2.** $1 - A$.

3. $0(A + B)$. **4.** $1 + A$.

5. $B(1 + A)$.

6. $A + AB$. [*Indicación:* Esto es, $A(1 + B)$.]

7. $A(A + B)$. **8.** $(A + B)(A + B)$.

9. $(A + B)(B + C)$. **10.** $(A + B)'(A + B)$.

11. $A(A + B)(B + C)$. **12.** $A'(A + B)$.

13. $(A + B')(A' + B)$. **14.** $(A + B)^2(A + C)$.

15. Con la notación anterior, ¿dónde se discutió el teorema

$$A' + B' = (A \cdot B)'?$$

Complete el teorema recíproco $A' \cdot B' = (\quad)'$.

16. Pruebe que

$$A'B' + AB' + A'B = (AB)'$$

[Esto ha sido demostrado anteriormente usando los diagramas de Venn (¿dónde?), pero es bastante fácil probarlo usando los resultados generales junto con el teorema $A' + B' = (AB)'$ del ejercicio 15 inmediato anterior.]

Comenzamos con:

$$A'B' + AB' + A'B = A'(B + B') + AB' = \quad \text{(Resultados 2 y 9)}$$
$$= A' + AB' = \quad \text{(Resultado 13)}$$
$$= (A' + A)(A' + B') \quad \text{(Resultado 10)}$$

Se deja al lector finalizar la cuestión, que ahora es prácticamente evidente.]

17. Probar, sin usar los diagramas de Venn y con la notación abreviada anterior, que

$$A'B' = (A + B)'$$

[Éste es el segundo teorema, que fue preguntado en el ejercicio 15 anterior.]

18. Probar que $(A + B')(B + C')(C + A') = ABC + A'B'C'$.

[*Nota:* Se aconseja al lector utilizar esta notación con extremo cuidado si existe la probabilidad de que en un mismo problema aparezca algo de álgebra común.]

9.7. Manejo de la fórmula de la diferencia simétrica

Ya hemos visto que la fórmula de la diferencia simétrica es, con la notación de conjuntos,

$$A \Delta B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$$

En la forma abreviada se convierte en

$$A \Delta B = AB' + A'B$$

Las fórmulas dadas en el ejercicio anterior, cuestiones 15 a 17, a saber:

$$A' + B' = (AB)'$$

y

$$A'B' = (A + B)'$$

merecen la pena memorizarlas. Son usadas aquí y más adelante en este libro.

Teorema. $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \cap C)$. En la forma abreviada será:

$$(AB) \Delta (AC) = A(B \Delta C)$$

Tendremos:

$$\begin{aligned}(AB) \Delta (AC) &= (AB)(AC)' + (AB)'(AC) = \\ &= AB(A' + C') + AC(A' + B') = \qquad \text{(de lo anterior)} \\ &= AA'B + ABC' + AA'C + AB'C = \\ &= ABC' + AB'C = \qquad \text{(ya que } AA' = 0) \\ &= A(BC' + B'C) = \\ &= A(B \Delta C)\end{aligned}$$

EJERCICIO 9.5

1. Considerando $E = \{a, b, c, d, e\}$ y $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{c, d, e\}$, verificar que en este caso, $A \Delta B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

2. Si $A = \{1, 3, 4, 6, 9\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5, 9\}$, escribir el valor de $A \Delta B$, supuesto que el conjunto universal lo forman los números naturales menores que 10.

Compriebe que en este caso,

$$(AB) \Delta (AC) = A(B \Delta C)$$

3. Probar que

$$(A \Delta B)(A \Delta C) = AB'C' + A'BC$$

4. Probar que

$$(A + B) \Delta (A + C) = A'(B \Delta C)$$

Deducir que

$$(AB) \Delta (AC) + (A + B) \Delta (A + C) = B \Delta C$$

5. Probar que

$$(A \Delta B)' = AB + A'B' = A' \Delta B = A \Delta B'$$

6. Simplificar

$$(A \Delta B) \Delta (A \Delta C)$$

10 Lógica simbólica matemática

10.1. Lógica

Incluso los más experimentados autores se pueden quedar sin ideas a veces, y, una vez planificado este capítulo y sintiendo que el primer apartado sería por necesidad algo tedioso, este escritor comenzó a buscar por todas partes ideas sencillas. Su amigo John Ward le proporcionó el siguiente constructivo ejemplo y el hijo del autor, Peter, rápidamente construyó otro que poseía una curiosa agudeza.

Considere las afirmaciones:

a) Todos los cristianos son buena gente.
b) Todos los budistas son buena gente.
c) Todos los cristianos son budistas.

Nos hemos esforzado en deducir un proposición de otras dos dadas, pero hay un defecto en nuestra lógica, fácil de observar en los diagramas de Venn. en las figuras 10.1 y 10.2.

Sea $E = \{\text{Buena gente}\}$, $C = \{\text{Cristianos}\}$, $B = \{\text{Budistas}\}$. Claramente se encuentra, en ambas figuras, la condición de que los conjuntos B y C están completamente dentro del conjunto universal E, pero mientras en la figura 10.1 es posible que pueda haber algunos cristianos que sean budistas, en absoluto es necesario que sea así. De hecho, sería razonable decir que en todos los intentos y propósitos es la figura 10.2 la que representa el estado de las cosas en la realidad.

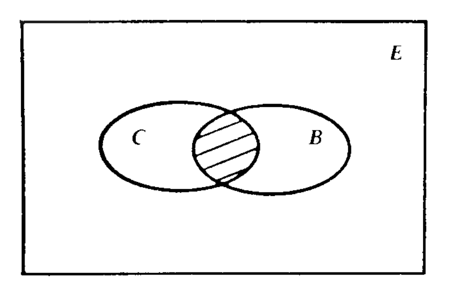


Figura 10.1

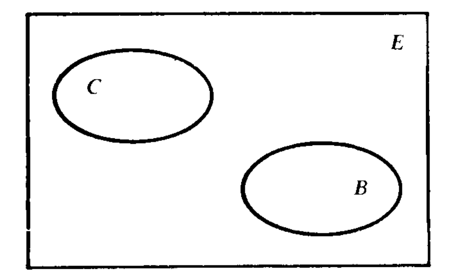


Figura 10.2

Considérense ahora las siguientes afirmaciones:

a) El carbón arde en el hogar.
b) La madera arde en el hogar.
c) El carbón es madera.

Sin sentido, diríamos primeramente, ¿pero es así? El carbón, después de todo, es madera que ha estado enterrada bajo una intensa presión durante millones de años. La lógica es, por supuesto, tan engañosa como en el ejemplo anterior. Sólo ocurre que el diagrama de Venn correcto podría ser dibujado como en la figura 10.3.

Sea $E = \{\text{Material quemado en un hogar}\}$, $W = \{\text{Madera}\}$ y $C = \{\text{Carbón}\}$. Entonces se ve que podemos establecer que $C \subset W$.

La teoría de la lógica simbólica matemática está íntimamente relacionada con el álgebra booleana, explicada en los dos capítulos anteriores. Es curioso que la investigación de esta materia solamente haya ocurrido de forma sistemática a partir del siglo XIX, dado

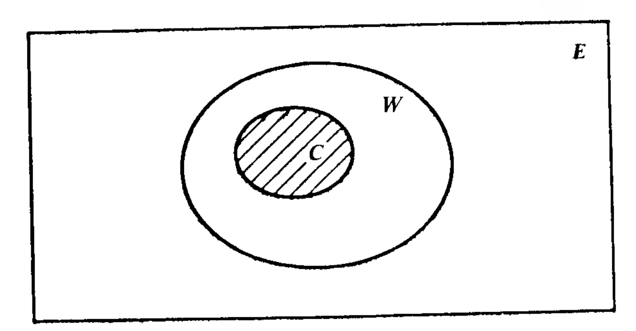


Figura 10.3

que nosotros estamos constantemente utilizando en nuestra vida diaria razonamientos lógicos y hemos venido haciendo esto durante miles de años. Durante muchos siglos ha existido, por supuesto, una aproximación no matemática, pero hemos demostrado ser marcadamente tardíos en desarrollar una formulación matemática para el tema.

Veremos que la afinidad entre la teoría de conjuntos y la lógica simbólica es realmente grande. Así, las ideas están íntimamente encadenadas, por lo que sería cierto decir que existen ligeras diferencias en el modo de acercarse al mismo asunto, la teoría de conjuntos desde la consideración de objetos, y la lógica desde la consideración de proposiciones.

Continuamos nuestra investigación con otro ejemplo:

a) *PQRS* es un rombo.

b) Los ángulos opuestos del cuadrilátero *PQRS* son iguales.

Aquí,

$$a \Rightarrow b$$

es verdad, pues sabemos que los ángulos opuestos de un rombo son iguales. En cambio, no implica que la inversa

$$b \Rightarrow a$$

sea verdad; así, si la proposición *b* es la afirmación original (esto es, si los ángulos opuestos de *PQRS* son iguales), entonces *PQRS* es

un paralelogramo (que puede o no ser un rombo) y la proposición a no es válida. Será verdad que

$$b' \Rightarrow a'$$

esto es, si los ángulos opuestos del cuadrilátero $PQRS$ no son iguales, entonces $PQRS$ no es un rombo.

En este ejemplo, a' se dice que es la negación de a y b' la negación de b (que corresponden a los complementarios A' y B' de los conjuntos A y B).

Podemos presentar esta proposición, igualmente de fácil, en notación de conjuntos.

Suponga

$$A = \{\text{Rombos}\}$$
$$B = \{\text{Cuadriláteros con ángulos iguales}\}$$

entonces

$$A \subset B \quad \text{conduce a} \quad B' \subset A'$$

Estos resultados son ciertos en general.

Teorema. Si tenemos dos proposiciones a y b tales que $a \Rightarrow b$, entonces $b' \Rightarrow a'$. Esto puede ser escrito como:

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (b' \Rightarrow a')$$

El resultado correspondiente para dos conjuntos A y B sería

$$A \supset B \Leftrightarrow B' \supset A'$$

Alternativamente,

$$A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$$

Esto es fácilmente demostrable con un diagrama de Venn y la verificación se deja al lector como ejercicio (véase el ejercicio 9.4).

10.2. Notación

Ahora definiremos y extenderemos nuestros símbolos lógicos. Si a es una afirmación, entonces a' es la negación de a (esto es, la proposición negando la verdad de a).

Si a y b son afirmaciones, entonces:

1) $a \wedge b$ es la proposición que afirma ambas, a y b.
2) $a \vee b$ es la proposición que afirma a o b, o ambas, a y b.

El «a y b» (esto es, $a \wedge b$) corresponden exactamente con $A \cap B$ en la teoría de conjuntos, como puede verse enseguida considerando la figura 6.6. El «a o b» (esto es, $a \vee b$) se corresponde exactamente con $A \cup B$ en teoría de conjuntos, como puede verse en la figura 6.9. Se necesita un gran cuidado al usar el símbolo de «o», $\vee$, ya que afirmamos que éste significa «una de las proposiciones o la otra, o ambas proposiciones».

Vemos enseguida que el álgebra de conjuntos se da a sí misma para la lógica simbólica. Los símbolos $\wedge$ y $\cap$ se parecen mucho, al igual que $\vee$ y $\cup$; desde el punto de vista nemotécnico, esto es muy conveniente.

Antes de seguir más adelante examinaremos algunos ejemplos para encontrar si se pueden dibujar lógicamente conclusiones a partir de afirmaciones.

Ejemplo. Supóngase:

a) Toda la gente inteligente come manzanas.
b) Algunos niños comen mazanas.
c) Algunos niños son inteligentes.

¿Es cierto que $a \wedge b \Rightarrow c$?
Podemos ver la situación en un diagrama de Venn:

$$A = \{\text{Comedores de manzanas}\}$$

$$P = \{\text{Gente inteligente}\}$$

$$B = \{\text{Niños}\}$$

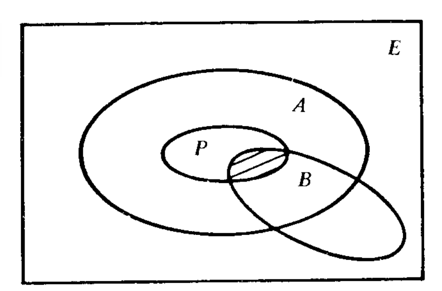


Figura 10.4

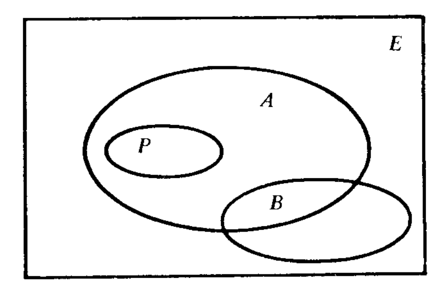


Figura 10.5

Tenemos:

$a \Rightarrow A \supset P$, pero

$b \Rightarrow$ algunos niños (no todos necesariamente) están en A.

Se sigue que la categoría necesaria para c (esto es, $P \cap B$) puede tener algunos elementos (Fig. 10.4) o puede ser el conjunto vacío (Fig. 10.5); no podemos decir, por tanto, que $a \wedge b \Rightarrow c$.

Si la proposición a hubiera sido traspuesta, hubiéramos sido capaces de sacar tal conclusión. Replanteemos nuestro problema y probemos de nuevo:

a) Todos los que comen manzanas son inteligentes.

b) Algunos niños comen manzanas.

c) Algunos niños son inteligentes.

Ahora es cierto que $a \wedge b \Rightarrow c$.

El diagrama de Venn de la figura 10.6 muestra esto. El conjunto *P* de la gente inteligente incluye ahora a todos los que comen manzanas (ignoremos a los insectos y pájaros) y el conjunto que necesitamos es $P \cap B$ (señalado por la parte sombreada).

Como algunos niños están en el conjunto *A* (comedores de manzanas), que está por completo en *P*, se deduce que algunos niños están en el conjunto *P*.

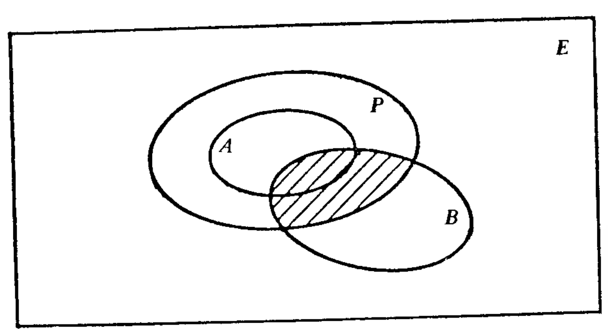


Figura 10.6

EJERCICIO 10.1

Establezca si las conclusiones en los apartados 1-7 son lógicas. Dibuje un diagrama de Venn para cada cuestión, representando la situación. El hecho de que usted pueda estar en desacuerdo con los sentimientos expresados en las proposiciones iniciales no afecta a la lógica.

1. Un triángulo isósceles puede ser dibujado con su ángulo vertical de cualquier valor entre 0 y 180°.
   Algunos triángulos son rectángulos.
   Por tanto, algunos triángulos rectángulos son isósceles.
2. A todo el mundo le gusta tener más que el resto.
   A los socialistas no les gusta que haya gente que tenga más que otros.
   Por tanto, los socialistas no existen.
   (¡No se pretende que la cuestión sea tomada demasiado en serio!)

3. Algunos programas de televisión conducen a los espectadores a hacer determinadas cosas.
La televisión hace perezosos a los espectadores.
Por tanto, la televisión consigue que los espectadores perezosos hagan cosas.

4. Los franceses hablan francés.
Los alemanes hablan alemán.
Por tanto, los italianos hablan italiano.

5. Algunos números son múltiplos de 2.
Algunos números son múltiplos de 3.
Algunos números son múltiplos de 4.
Por tanto, algunos números son múltiplos de 24.

6. Todos los hombres de negocios van a Manchester en coche.
Los coches no pueden aparcarse en Manchester.
Por consiguiente, todos los hombres de negocios van a Manchester en transportes públicos.

7. Los exploradores tienen a su alrededor moscas.
No hay moscas junto a los hombres inteligentes.
Por tanto, un hombre inteligente jamás será explorador.

En los apartados 8, 9 y 10, asumiendo que las proposiciones iniciales son ciertas, escriba una conclusión lógica en cada caso.

8. Todos los muchachos tienen dinero para sus gastos.
Algunos muchachos fuman cigarrillos.

9. A todas las mujeres les gustan los sombreros.
Algunas mujeres no llevan sombreros.

10. N es un número constante divisible por 3 y por 7.

11. Los viajeros suben al norte.
Los viajeros bajan al sur.
Los viajeros suben a la ciudad.
Por tanto, los viajeros desde Soria bajan a Madrid, ¿o suben?

12. Muestre con la ayuda de diagramas de Venn que

$$A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$$

10.3. Tablas de verdad

Consideremos ahora las proposiciones que o bien son verdaderas o bien son falsas. Si la proposición es verdad, se dice que tiene un valor de verdad 1, y si es falsa se dice que tiene un valor de verdad 0. Por tanto, si $a = 1$, entonces $a' = 0$, y si $a = 0$, entonces $a' = 1$. Esto puede ser escrito como:

$$a = 1 \Leftrightarrow a' = 0 \quad \text{y} \quad a = 0 \Leftrightarrow a' = 1$$

Las ampliaciones de esto son igualmente válidas; por supuesto:

$$(a \wedge b) = 0 \Leftrightarrow (a \wedge b)' = 1 \quad \text{y} \quad (a \vee b) = 0 \Leftrightarrow (a \vee b)' = 1$$

La idea se puede relacionar obviamente con la teoría de conjuntos. Para el valor 1 corresponde la relación de pertenencia a un conjunto, y el valor 0 corresponde a la relación de no pertenencia.

A estas alturas debe haberse vuelto plenamente claro para el lector que las proposiciones no son necesariamente verdad en la vida. La lógica meramente concierne a la deducción correcta de conclusiones, obtenidas a partir de afirmaciones dadas. Si las afirmaciones iniciales son excéntricas, ¡difícilmente podremos esperar que los resultados no lo sean!

Antes de proceder a la obtención de las tablas de verdad, debemos estar muy seguros de que entendemos el significado de $a \wedge b$ (a y b) y $a \vee b$ (a o b, o ambas, a y b).

1) $a \wedge b$. Si $a = 1$ y $b = 1$, entonces $a \wedge b = 1$, ya que a y b son ambas 1. Para el resto de los casos, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1,\ b = 0 \\ a = 0,\ b = 1 \\ a = 0,\ b = 0 \end{array}\right\} \text{tendremos que } a \wedge b = 0$$

para a y b, no siendo 1 a la vez. La situación corresponde exactamente al área rayada en la figura 10.7.

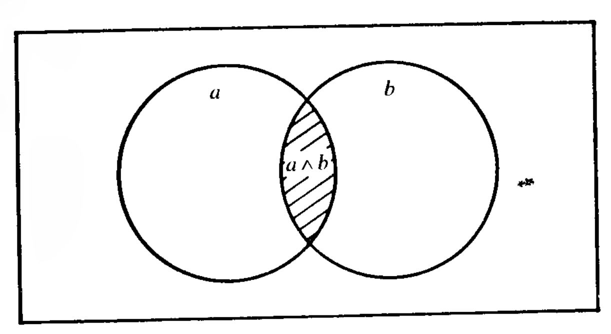


Figura 10.7

2) $a \vee b$. Esto es más sutil. Recordaremos que $a \vee b$ quiere decir que el éxito se conseguirá si cualquiera, a o b, es 1 ($a = 1$ o $b = 1$) o si a y b, a la vez, son 1. Así, si

$$\left.\begin{array}{l} a = 1,\ b = 1 \\ a = 1,\ b = 0 \\ a = 0,\ b = 1 \end{array}\right\} \text{ tendremos que } a \vee b = 1$$

Solamente será fracaso para $a = 0$, $b = 0$, que daría $a \vee b = 0$. La situación corresponde exactamente con el área rayada en la figura 10.8.

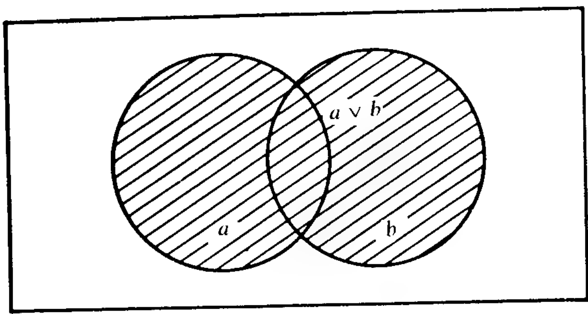


Figura 10.8

Suponga que tenemos dos afirmaciones, a y b. Entonces a puede ser 1 ó 0 y b puede ser 1 ó 0. Definiendo «y» y «o» como en (1) y (2) de la página 168, tendremos todas las combinaciones posibles de $a \wedge b$ y $a \vee b$ en la tabla 10.1.

TABLA 10.1

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Siendo éstas las llamadas tablas de verdad para $a \wedge b$ y $a \vee b$.

Avanzando más tendremos los resultados de la tabla 10.2.

TABLA 10.2

a	b	$a \vee b$	$(a \vee b)'$	a'	b'	$a' \wedge b'$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Observamos que las columnas 4.ª y 7.ª en esta tabla son iguales, pero hemos cubierto todas las combinaciones posibles de a y b. Por tanto, hemos probado que

$$(a \vee b)' \Leftrightarrow a' \wedge b'$$

Similarmente puede ser probado que

$$(a \wedge b)' \Leftrightarrow a' \vee b'$$

que se deja como ejercicio para el lector (véase pág. 153).

Teorema. Si $a \Rightarrow b \vee c$, entonces $b' \wedge c' \Rightarrow a$.

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos visto que

$$[a \Rightarrow b] \Leftrightarrow [b' \Rightarrow a']$$

$$[a \Rightarrow b \vee c] \Leftrightarrow [(b \vee c)' \Rightarrow a']$$

$$\Leftrightarrow [b' \wedge c' \Rightarrow a']$$

según lo anterior.

10.4. Resultados generales

TABLA 10.3

«Y»		«O»	
1A	$a \wedge a \Leftrightarrow a$	1B	$a \vee a \Leftrightarrow a$
2A	$a \wedge a' \Leftrightarrow 0$	2B	$a \vee a' \Leftrightarrow 1$
3A	$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$	3B	$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$
4A	$(a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$	4B	$(a \vee b) \vee c \Leftrightarrow a \vee (b \vee c)$
5A	$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	5B	$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
6A	$a' \wedge b' \Leftrightarrow (a \vee b)'$	6B	$a' \vee b' \Leftrightarrow (a \wedge b)'$

Algunos de estos resultados son probados más adelante. El resto se dan al lector como ejemplos en el próximo ejercicio.

Ejemplo. Probar los resultados 1*A*, 2*B*, 3*B*, 4*A* y 5*A* anteriores. 1*A* resulta trivial: la verdad de a y de a, es la verdad de a. 2*B* es igualmente sencillo: es cierto que una proposición a puede ser verdadera o falsa, pero si a es verdad, entonces a' es falsa (y viceversa); por tanto, $a \vee a' = 1$ (con certeza). Podríamos haber probado estos resultados mediante tablas de verdad, que será el método que adoptamos para el resto.

Para 3*B*:

TABLA 10.4

a	b	$a \vee b$	$b \vee a$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Como todos los resultados de las columnas 3 y 4 son los mismos, se deduce que $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$.

Para 4*A*:

TABLA 10.5

a	b	c	$a \wedge b$	$b \wedge c$	$(a \wedge b) \wedge c$	$a \wedge (b \wedge c)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

En la tabla anterior, la columna 6 se saca por combinación de las columnas 4 y 3; la columna 7 por combinación de la 1 y la 5. Por tanto,

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

Se pueden derivar fácilmente ampliaciones del resultado 4*A*. Por ejemplo:

$$(a \wedge b) \wedge c = (a \wedge c) \wedge b = (b \wedge a) \wedge c$$

De hecho, como los correspondientes resultados para conjuntos, podemos escribir $a \wedge b \wedge c$, y similarmente, $a \vee b \vee c$.

Para 5*A*:

TABLA 10.6

a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Podemos ver que, en la tabla 10.6, la columna 5 y la 8 son la misma. Por tanto:

$$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

EJERCICIO 10.2

Los resultados generales a los que se hace referencia son los expuestos en la tabla 10.3.

Pruebe que son válidas las siguientes afirmaciones 1 a 6:

1. $a \vee a \Leftrightarrow a$ (resultado 1*B*).

2. $a \wedge a' \Leftrightarrow 0$ (resultado 2*A*).

3. $a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$ (resultado 3*A*).

4. $(a \vee b) \vee c \Leftrightarrow a \vee (b \vee c)$ (resultado 4*B*).

5. $a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (resultado 5*B*).

6. $a' \vee b' \Leftrightarrow (a \wedge b)'$ (resultado 6*B*).

7. Descubra si es cierto o no que:

$$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee c$$

10.5. La función NOR

Introducimos ahora la función NOR $a_N b$, que se lee como «ni a ni b». Es, por tanto, $a' \wedge b'$. Así, cualquier elemento de $a' \wedge b'$ es un elemento del complementario de a y del complementario de b y, por tanto, no pertenece ni a a ni a b. Se sigue que:

$$a_N b \Leftrightarrow a' \wedge b' \Leftrightarrow (a \vee b)'$$

utilizando un resultado anterior, cualquier función lógica de a y b puede ser expresada por completo en términos de la función NOR, y esto es valioso para el diseño en teoría de circuitos. Dos muestras bastarán para explicar el método.

Ejemplo. Demostrar que $a \wedge b' \Leftrightarrow (a_N a)_N b$.

DEMOSTRACIÓN: $a \wedge b' \Leftrightarrow a'_N b$, para ambas a y $b' \Leftrightarrow$ ni a' ni b.

¿Cómo podemos escribir ahora a' como una función NOR? Si $a_N b$ significa «ni a ni b», entonces $a_N a$ significa «ni a ni a», esto es, significa a'. Por tanto,

$$a \wedge b' \Leftrightarrow (a_N a)_N b$$

Ejemplo. Demostrar que

$$a' \vee b \Leftrightarrow [(a_N a)_N b]_N [(a_N a)_N b]$$

DEMOSTRACIÓN: $a' \vee b \Rightarrow (a \wedge b')'$, del resultado 6$B$ de la tabla 10.3, intercambiando b por b':

$$\Leftrightarrow [(a_N a)_N b]', \quad \text{del ejemplo anterior}$$

$$\Leftrightarrow [(a_N a)_N b]_N [(a_N a)_N b]$$

usando el segundo paso en el ejemplo anterior (esto es, la idea de que $K' \Leftrightarrow K_N K$, donde, en este caso, $K \Leftrightarrow (a_N a)_N b$).

El estudiante difícilmente podrá haber pasado por alto que esta corta sección acerca de la función NOR requiere unos cuidados razonamientos, y la siguiente sugerencia le servirá de ayuda. Uno puede pasar directamente de la función AND a la función NOR como en el primer ejemplo anterior, pero para pasar de la función OR a la función NOR será acertado pasar primero a la función AND como en el segundo ejemplo anterior. Así:

$$\text{AND} \rightarrow \text{NOR}$$

$$\text{OR} \rightarrow \text{AND} \rightarrow \text{NOR}$$

serán los pasos de razonamiento en cada caso. Todo esto está muy bien, puede pensar el lector, pero por qué introducir esta peculiar función NOR en el proceso, cuando las funciones AND y OR parecen ser mucho más claras. La respuesta está en el próximo capítulo, en la teoría de circuitos lógicos. Podemos desarrollar circuitos introduciendo distintas clases de unidades básicas, o podemos construir otros circuitos para el mismo trabajo, siendo en este caso como virtualmente de los mismos elementos, esto es, circuitos NOR. De

hecho, continuaremos ambos tipos, pero el último es de gran valor para muchas utilizaciones prácticas, aunque quizá más aburrido de planificar inicialmente.

EJERCICIO 10.3

1. Demuestre que:

a) $a \vee b \Leftrightarrow (a' \vee b')'$.
b) $a \vee b \Leftrightarrow (a_N b)'$.
c) $a \wedge b \Leftrightarrow a'_N b'$.

2. Pruebe que:

a) $a' \wedge b \Leftrightarrow a_N(b_N b)$.
b) $a \vee b' \Leftrightarrow [a_N(b_N b)]_N[a_N(b_N b)]$.

Exprese las siguientes cuestiones (de la 3 a la 8) tan sólo utilizando la función NOR.

3. $a \wedge b$. **4.** $a \vee b$.

5. $a \wedge (b \vee c)$. **6.** $a' \vee b'$.

7. $a \vee (b \wedge c)$. **8.** a.

11 Teoría de circuitos lógicos

11.1. Notación abreviada de la lógica simbólica

Se recordará que una forma de notación abreviada para conjuntos fue introducida en la parte final del capítulo 7. Ahora introduciremos una notación exactamente análoga para las operaciones lógicas.

Sustituimos el símbolo lógico de OR ($\vee$) por la suma, esto es, $a \vee b$ se convierte en $a + b$.

Sustituimos el símbolo lógico de AND ($\wedge$) por la multiplicación, esto es. $a \wedge b$ se convierte en ab.

La notación para la función NOR se explica en el apartado 11.3.

El símbolo $\Leftrightarrow$ es sustituido por el signo de igualdad ($=$).

Notación lógica	*Notación abreviada*
$a \vee a \Leftrightarrow a$	$a + a = a$
$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$	$a + b = b + a$
$a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c$	$a + (b + c) = (a + b) + c$
$a \wedge a \Leftrightarrow a$	$aa = a$
$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$	$ab = ba$
$a \wedge (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c$	$a(bc) = (ab)c$
$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a(b + c) = ab + ac$
$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a + bc = (a + b)(a + c)$
$a \vee a' \Leftrightarrow 1$	$a + a' = 1$
$a \wedge a' \Leftrightarrow 0$	$aa' = 0$
$a' \wedge b' \Leftrightarrow (a \vee b)'$	$a'b' = (a + b)'$
$a' \vee b' \Leftrightarrow (a \wedge b)'$	$a' + b' = (ab)'$

Con la excepción de que en la lógica usamos letras minúsculas, en lugar de las mayúsculas utilizadas para conjuntos, estos resultados son idénticos a aquellos que obtuvimos anteriormente en la notación abreviada para conjuntos. Usaremos los resultados anteriores a lo largo del resto del capítulo. La notación de la función NOR permanece inalterada.

11.2. Circuitos AND y OR*

Aunque el álgebra booleana es de importancia en la teoría de circuitos de los ordenadores, desafortunadamente no es la respuesta completa. En su forma de lógica simbólica, es aplicable al trazado de circuitos serie y paralelo, pero no necesariamente otros tipos de circuitos. Limitaremos nuestros estudios en este libro enteramente a la consideración de aquellos puntos donde pueda ser aplicado nuestro trabajo anterior.

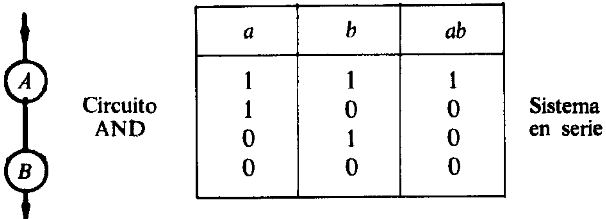
Comencemos con dos simples interruptores A y B, conectados primeramente en serie (Fig. 11.1) y posteriormente en paralelo (Figura 11.2). La corriente circulará por A (cuando esté conectado) o no lo hará (cuando esté desconectado). Una situación similar es aplicable al interruptor B. Las tablas de verdad se construyen utilizando las afirmaciones a y b, donde:

$a = 1$ (interruptor A conectado)
$a = 0$ (interruptor A desconectado)
$b = 1$ (interruptor B conectado)
$b = 0$ (interruptor B desconectado)

En el circuito serie (Fig. 11.1), la corriente circulará si y sólo si A y B están conectados a la vez, esto es, si $a = 1$, $b = 1$; esto implica que $ab = 1$ y corresponde a $AB = F$ (donde F indica que la corriente circula).

* *N. del T.:* En la literatura española existente acerca de la lógica de circuitos, a veces se puede encontrar la notación de las funciones lógicas de la forma siguiente: Y(=AND), O(=OR), ON(=NOR), cuya correspondencia en inglés es la que aparece entre paréntesis.

La tabla de verdad y el circuito 11.1 muestran las distintas situaciones.

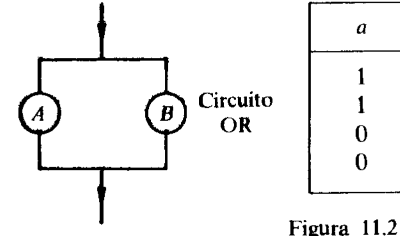


a	b	ab
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Figura 11.1

Claramente se ve que éste es un circuito AND.

En el circuito paralelo (Fig. 11.2) la corriente circulará si A está conectado, o si B está conectado, o si ambos, A y B, lo están a la vez. Esto implica que $a + b = 1$, y corresponde a $A + B = F$ (definido F como antes). La tabla de verdad se muestra junto al circuito.



a	b	$a + b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Circuito paralelo

Figura 11.2

Claramente se ve que éste es un circuito OR.

Los circuitos eléctricos completos correspondientes a los sistemas de interruptores anteriores, se muestran a continuación (Figuras 11.3 y 11.4). Cada uno tiene una batería, una bombilla y dos interruptores.

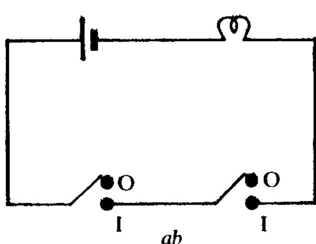


Figura 11.3

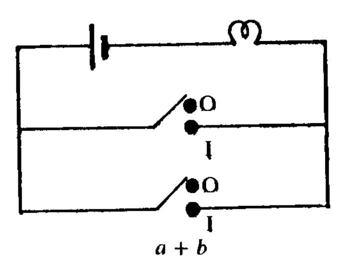


Figura 11.4

Un problema ligeramente más elaborado y que se da a menudo en casa, es el circuito de encendido de una lámpara desde dos interruptores separados, por ejemplo la luz de una escalera que puede ser encendida por dos interruptores, uno en el piso de arriba y otro en el piso de abajo. Este circuito se muestra en la figura 11.5.

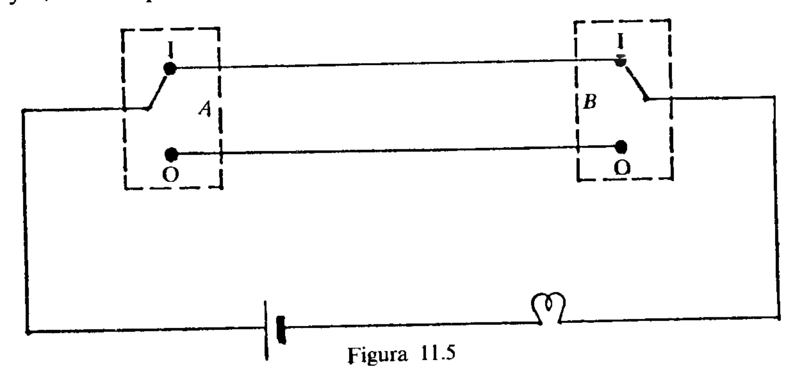


Figura 11.5

Es claro que la corriente circulará tanto si $a = 1$, $b = 1$ como si $a = 0$, $b = 0$. Si llamamos $c = 1$ (corriente circulando) y $c = 0$ (corriente sin circular), la tabla de verdad será la tabla 11.1.

TABLA 11.1

a	b	c
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

donde c representa «ab y $a'b'$», esto es,

$$c = ab + a'b'$$

Suponga ahora que cruzáramos los cables de A a B, tal como se muestra en la figura 11.6.

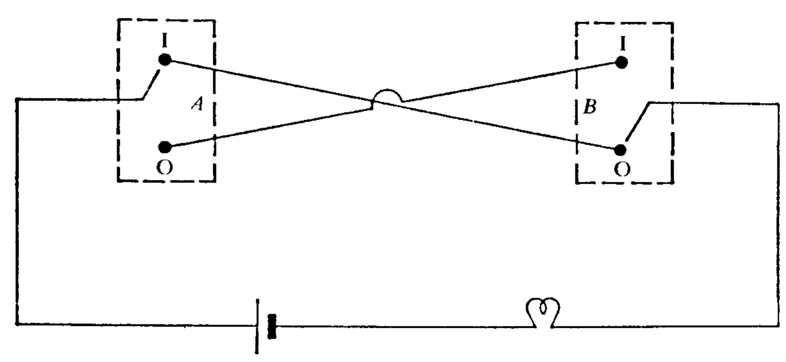


Figura 11.6

El circuito es tan efectivo como el anterior y realiza exactamente la misma labor, pero su tabla de verdad es diferente de la del anterior, ya que su última columna es la negación de la última columna de la tabla 11.1, esto es, la última columna de c' (la negación, o el complementario, de c):

TABLA 11.2

a	b	c'
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Aquí, c' se forma como «ab' y $a'b$», esto es:

$$c' = ab' + a'b$$

de donde

$$c = (ab' + a'b)'$$

Que, por tanto, resulta:

$$ab + a'b' = (ab' + a'b)'$$

Esto puede ser demostrado utilizando tablas de verdad para cada expresión $ab + a'b'$, $(ab' + a'b)'$, o mediante la utilización de los resultados teóricos obtenidos con anterioridad. Se deja a los entusiastas tal demostración.

Ejemplo. En el circuito dado en la figura 11.7, $a = 1$ ó 0 corresponde a que el interruptor A esté conectado o desconectado, respectivamente, etc. Demuestre que la corriente circulará si:

$$(a + b)c + d = 1$$

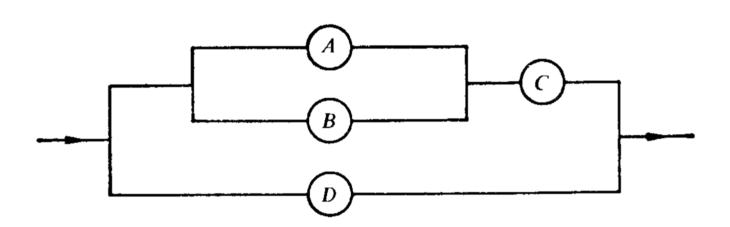


Figura 11.7

DEMOSTRACIÓN: Considere la parte superior del sistema. A y B en paralelo equivalen a $a + b$; introduciendo C en el cálculo, pondremos C en serie con el sistema A, B. Por tanto, la parte superior del sistema tendrá por función lógica $(a + b)c$. Por último, D está en paralelo con el circuito A, B, C; así, la red completa es equivalente a $(a + b)c + d$. La corriente circulará cuando sea 1. Por tanto,

$$(a + b)c + d = 1$$

EJERCICIO 11.1

Escriba las funciones lógicas para los sistemas 1-4 de las figuras 11.8 a 11.11, utilizando la notación establecida.

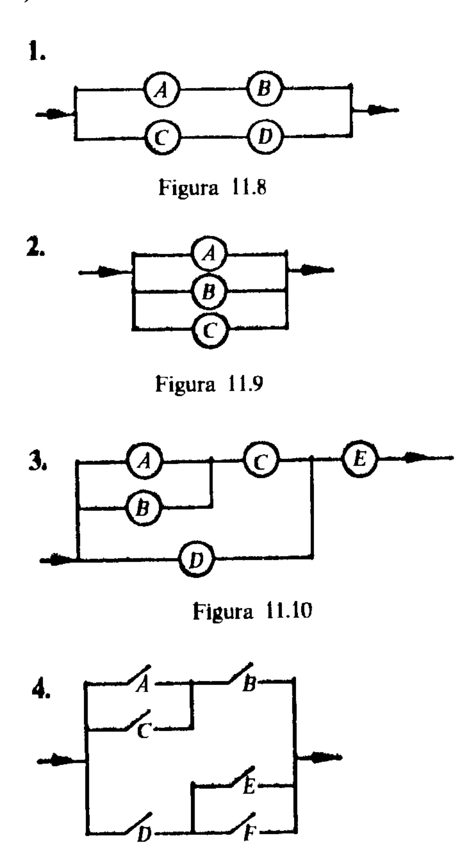


Figura 11.8

Figura 11.9

Figura 11.10

Figura 11.11

5. En las cuestiones 1 a 4 anteriores, dados $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, $e = 1$, $f = 0$, determine, en cada ejercicio, si circulará corriente.

6. Repita la cuestión 5, pero con $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 0$, $f = 1$.

7. Dibuje cuidadosamente diagramas ilustrando los sistemas cuyas funciones lógicas son:

a) $(a + b)c$; *b*) $ab + cde$;
c) $ab(c + de)$; *d*) $(ab + c)(de + f)$;
e) $ab' + a'b + c$; *f*) $ab' + bc$.

11.3. El circuito NOR

En el apartado 11.2 considerábamos dos clases de circuitos, AND y OR. Necesitamos uno más, que podemos llamar inversor, que será aquél cuya salida sea la complementaria de la entrada, esto es, si la entrada es a, la salida será a'. Recordemos que:

$$(a = 0) \Leftrightarrow (a' = 1) \quad ; \quad (a = 1) \Leftrightarrow (a' = 0)$$

Esto implica que una entrada de corriente circulando conduce a una salida de corriente no circulante, y viceversa. El sencillo electroimán de la figura 11.12 sirve a nuestro propósito. El sistema completo se puede llamar *puerta-inversor*.

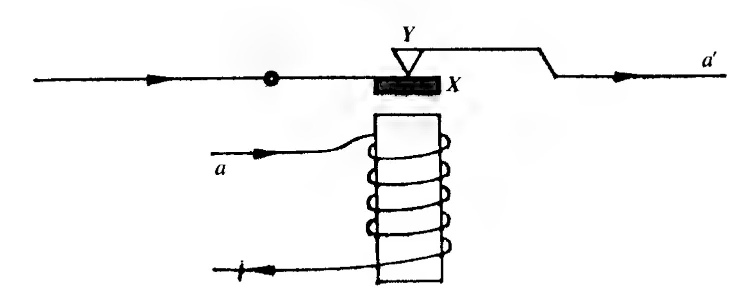


Figura 11.12

Si ninguna corriente de entrada a circula por el circuito arrollado al electroimán, el contacto se mantiene en el circuito de salida a', esto es, $a = 0 \Leftrightarrow a' = 1$. Si la corriente de entrada circula alrededor del electroimán, el contacto por muelle montado en el interruptor X desaparecería, quedando X e Y separados y el circuito de

salida abierto. Por tanto, $a = 1 \Leftrightarrow a' = 0$. Así, se cumplen nuestras dos condiciones.

La representación simbólica de un inversor es la de la figura 11.13.

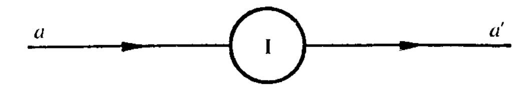


Figura 11.13

En el apartado 10.5 mostrábamos que $a_N b \Leftrightarrow a' \wedge b'$, esto es, en nuestra notación abreviada:

$$a_N b = a'b'$$

Con vistas a conseguir un circuito NOR, $a \veebar b$, necesitaríamos dos inversores, con las salidas conectadas en serie (Fig. 11.14).

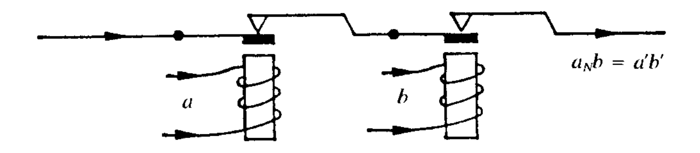


Figura 11.14

Es claro que la corriente circulará en el circuito $a'b'$ (de salida) si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$. Representamos tal circuito (llamado *puerta* NOR) simbólicamente por la figura 11.15.

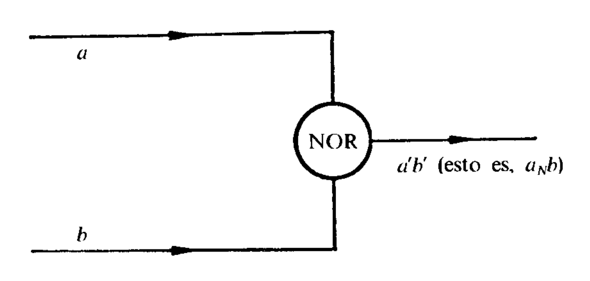


Figura 11.15

La tabla de verdad para la puerta NOR es la tabla 11.3.

TABLA 11.3

a	b	a'	b'	$a'b'$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Obviamente, podemos añadir más inversores de la misma forma, en una puerta NOR, de modo que consigamos una salida lógica $a_N b_N c \ldots = a'b'c' \ldots$ Una tabla de verdad para tres entradas es la tabla 11.5.

No existe necesidad real de pensar en un inversor como una puerta separada, ya que nuestras puertas NOR de una, dos, tres, etc., entradas y una salida, son elementos de una misma familia (Figura 11.16).

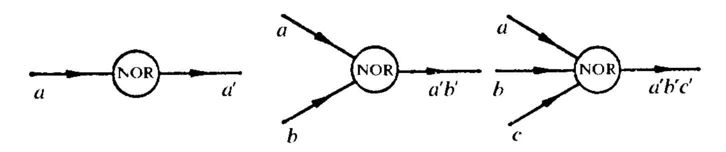


Figura 11.16

Ahora es necesario introducir otros dos símbolos de puerta: la puerta AND y la puerta OR. La puerta AND corresponde exactamente al circuito serie ab (Fig. 11.1) e implica que la salida $ab = 1$, sólo cuando $a = 1$ y $b = 1$ a la vez. La figura 11.1 no será eléctricamente de mucho valor para dos entradas (o más), por lo que la figura 11.17 muestra una modificación de una puerta NOR que nos dará

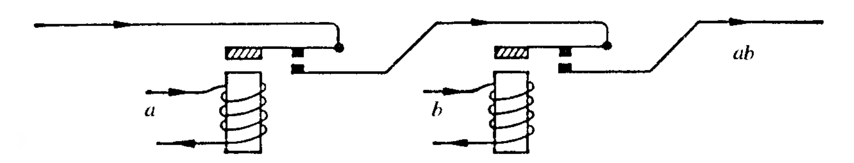


Figura 11.17

una salida cuando ambas (o todas) las corrientes estén circulando por los electroimanes (esto es, una puerta AND).

La tabla de verdad ha sido dada ya en la figura 11.1. El símbolo para una puerta AND es el de la figura 11.18.

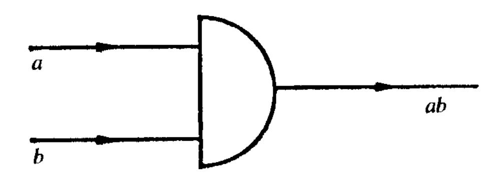


Figura 11.18

La puerta OR corresponde exactamente al circuito paralelo ($a + b$) de la figura 11.2, pero tampoco es de mucha utilidad práctica. Sin embargo, podemos modificar una vez más nuestras ideas acerca de los electroimanes para conseguir un esquema posible y utilizable (Fig. 11.19). Solamente es necesario un pequeño ajuste en el circuito de la figura 11.17 para asegurar una salida, desde una (o más) entradas a, b, ...

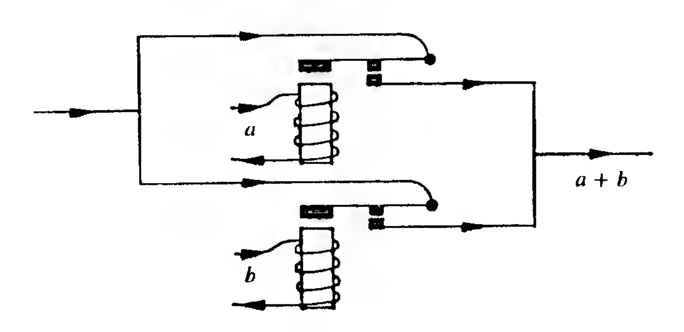


Figura 11.19

La salida $a + b = 1$ de una puerta OR está asegurada cuando se dan $a = 1$, o bien $b = 1$, o ambas $a = 1$ y $b = 1$. La tabla de verdad fue dada en la figura 11.2. El símbolo para una puerta OR se da en la figura 11.20.

Como con la puerta NOR, podemos añadir tantas entradas como deseemos a las puertas AND y a las puertas OR.

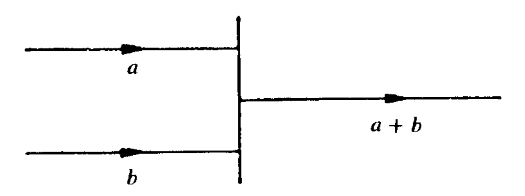


Figura 11.20

11.4. Diseño lógico: el semisumador binario

En el apartado anterior hemos discutido sobre sistemas con interruptores y electroimanes sencillos. Para funciones computacionales, estos sistemas son demasiado lentos[1]. Por otro lado, la respuesta de los transistores a las corrientes eléctricas es realmente rápida. Consecuentemente, los circuitos AND, OR y NOR con transistores sustituyen, en los ordenadores, a los simples dispositivos que nosotros habíamos considerado. El equipo actualmente usado está muy alejado de las miras de este libro, y de hecho es irrelevante para el estudio que estamos haciendo sobre las funciones lógicas.

Ahora estamos familiarizados con tres tipos de puertas. Suponga las entradas A, B, C, ..., cuyas funciones lógicas a, b, c, ..., son introducidas en un circuito con una sola salida. Entonces las posibilidades son las de la tabla 11.4.

TABLA 11.4

Circuito	Salida
AND	$abc\ldots$
OR	$a+b+c\ldots$
NOR	$a'b'c'\ldots$

Claramente, la puerta AND transmitirá un impulso si y sólo si todas las entradas A, B, C, ..., introducen impulsos en ella, esto es, si $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, ...

[1] Para tareas de enseñanza, sin embargo, los esquemas electromagnéticos descritos pueden ser los más instructivos.

La puerta OR transmitirá algún impulso si y sólo si cualquiera de las entradas A, B, C, ..., introduce un impulso en ella.

La puerta NOR transmitirá un impulso si y sólo si ninguna de A, B, C, ..., introduce un impulso en ella, esto es, si $a = b = c = \cdots = 0$. La tabla 11.5 (extensión de la de la tabla 11.3) ilustra el caso.

TABLA 11.5

a	b	c	a'	b'	c'	$a_N b_N c = a'b'c'$
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Obsérvese que hemos escrito todas las combinaciones posibles de a, b y c. Tenemos $a = 1$ ó 0, y lo mismo para b y c. Así, hay dos posibilidades para cada una de las tres funciones a, b y c. Por tanto, habrá $2^3 = 8$ combinaciones posibles. Obviamente no habrá salida a menos que todas las entradas sean cero.

Estamos ahora en condiciones de considerar el diseño de un semisumador binario, con dispositivo diseñado para sumar dos dígitos binarios a y b (véase Cap. 4, Ap. 4.3) que pueden ser 0 ó 1. El semisumador binario nos dará la unidad y el acarreo. Considere, en el sistema binario,

$$1 + 1 = 10 \ , \ 1 + 0 = 1 \ , \ 0 + 1 = 1 \ , \ 0 + 0 = 0$$

Si recomponemos estos resultados como una tabla de verdad, tendremos la tabla 11.6.

Trabajemos por separado con el acarreo y la unidad. En primer lugar, es claro que el acarreo es dado por ab. Esto requiere una simple puerta AND. La unidad es mucho más difícil, pero se hará muy fácil de ver mediante la construcción de una tabla de verdad,

TABLA 11.6

a	b	Suma	
		Acarreo	Unidad
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

aunque el método de derivación pueda parecer un poco artificial (Tabla 11.7).

TABLA 11.7

a	b	ab'	$a'b$	$ab' + a'b$
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

La última columna es exactamente la misma que la columna de la unidad de la tabla previa. Usando c para el acarreo y u para la unidad, tendremos:

$$c = ab$$
$$u = ab' + a'b$$

Así conseguimos nuestro semisumador binario (Fig. 11.21).

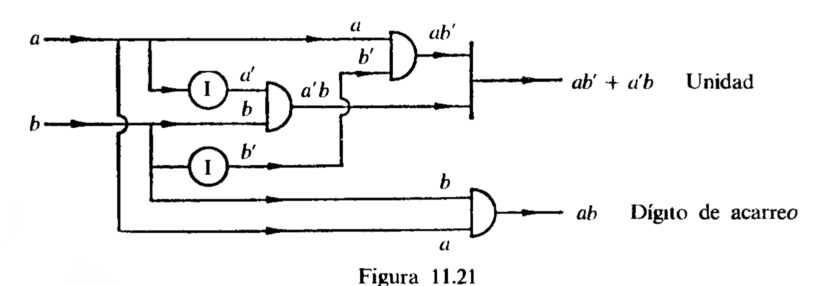


Figura 11.21

Este sistema utiliza seis puertas, esto es, dos inversores, tres puertas AND y una puerta OR. El lector observador se habrá dado cuenta de que la parte superior del circuito que nos da la unidad también responde al problema lógico de la luz de la escalera (páginas 182-185).

Mediante la transformación apropiada, el sistema para el semisumador binario puede ser reducido de seis puertas a cuatro (Figura 11.22). El razonamiento es como sigue:

$$u = ab' + a'b =$$
$$= aa' + ab' + a'b + bb' = \qquad \text{(ya que } aa' = 0 = bb'\text{)}$$
$$= (a + b)(a' + b') = (a + b)(ab')$$

Esto requiere una puerta OR (para $a + b$), una puerta AND (para ab), un inversor (para $(ab)'$) y otra puerta AND para completar $(a + b)(ab)'$. No se necesita ninguna puerta extra para c, el dígito de acarreo, ya que éste se obtiene directamente de la puerta AND, ab.

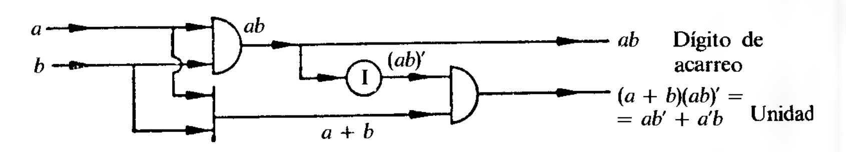


Figura 11.22

11.5. El sumador completo

La construcción de un sumador completo que pueda sumar cualesquiera dos números (previamente convertidos al sistema binario) se efectúa mediante la combinación de dos semisumadores.

La adición de dos números requiere que se sumen tres dígitos juntos en cada columna, una vez que haya sido dado el primer paso (en la columna de las unidades). Esto se sigue, enseguida, del hecho de que cada número que se suma proporciona un dígito y que también hay un número de acarreo (0 ó 1) para ser llevado en cada columna, excepto la primera. Por tanto, un circuito diseñado para sumar dos números necesita tres entradas. Tal dispositivo se

denomina sumador entero o completo. Suponga que las entradas para una determinada columna son *a*, *b* y *k* (*k* es el dígito de acarreo de la columna previa) y que construimos la tabla de verdad (Tabla 11.8).

TABLA 11.8

a	*b*	*k*	Total	Dígito acarreo	Dígito unidad
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	10	1	0
1	0	1	10	1	0
1	1	0	10	1	0
1	1	1	11	1	1

Observamos que el acarreo *c* se necesita solamente cuando dos o más de las *a*, *b* y *k* son distintas de 0. Esto sugiere:

$$c = abk' + ab'k + a'bk + abk =$$
$$= ab(k' + k) + (ab' + a'b)k =$$
$$= ab + qk$$

donde $q = ab' + a'b$ y $k + k' = 1$.

La verdad de nuestra intuitiva suposición puede ser comprobada fácilmente mediante la construcción de una tabla de verdad para $ab + qk$.

Advertimos que la unidad *u* es distinta de cero solamente cuando una o tres de las entradas son distintas de 0. Supondremos[2], por tanto, que:

$$u = abk + ab'k' + a'bk' + a'b'k =$$
$$= (ab + a'b')k + (ab' + a'b)k' =$$
$$= q'k + qk'$$

[2] También podríamos comprobar esto con la tabla de verdad correspondiente.

ya que demostramos anteriormente (págs. 184-185) que $ab + a'b' = (ab' + a'b)'$.

Finalmente, observamos que $ab' + a'b$, esto es, q, es la salida unidad de nuestro semisumador con entradas a y b. También, $q'k + qk'$, esto es, u, es la salida unidad de semisumador con entradas q y k.

Usaremos el símbolo de la figura 11.23.

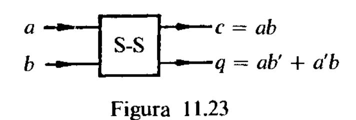


Figura 11.23

para un semisumador entero. Entonces, el sumador completo será el de la figura 11.24.

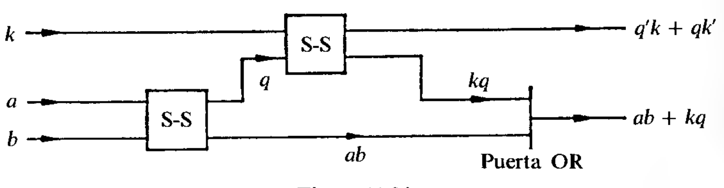


Figura 11.24

Sustituyendo nuestros símbolos para los semisumadores por la circuitería de la figura 11.7, tendremos el diagrama terminado de un sumador completo (Fig. 11.25).

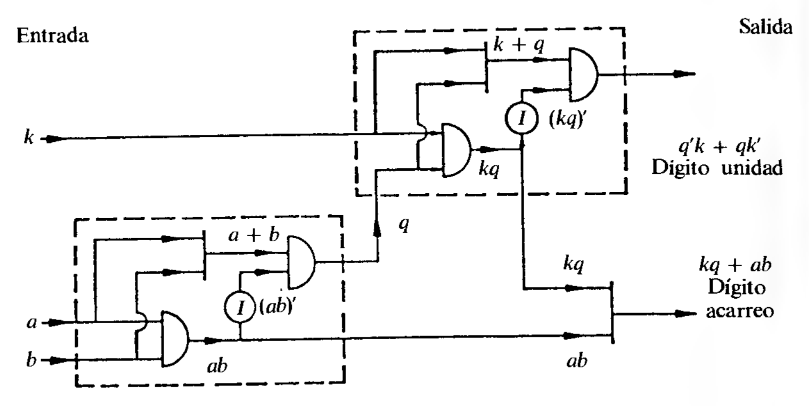


Figura 11.25

Se necesitan en total nueve puertas. Los semisumadores se dibujan encerrados por las líneas discontinuas.

11.6. El semisumador y sumador completo de puertas NOR

Aunque en los dos anteriores apartados hemos descrito satisfactoriamente un sistema para obtener semisumadores y sumadores completos binarios, los circuitos tienen el inconveniente de necesitar tres tipos diferentes de puertas. Dado que el número de puertas requeridas en un ordenador puede ser enorme, producción y mantenimiento se simplificarían en gran medida si se utilizase un solo tipo de puerta. Éste es, de hecho, el sistema de puertas NOR. Antes, sin embargo, de proyectar un circuito lógico, debemos convertir nuestras salidas para los dígitos de unidad y acarreo, a una apropiada forma de NOR. Esto es corto, pero no deja de ser difícil.

De la página 193 teníamos que el dígito de acarreo para el semisumador era

$$c = ab \qquad (1)$$

que ya está en una forma utilizable para nosotros, pero la unidad, obtenida en la página 193, es mucho más ardua. Comenzaremos de la forma siguiente:

$$u = (a + b)(ab)' = \quad \text{(demostrado en la pág. 193)}$$
$$= (a'b')'(ab)'$$

Ya que. de la página 180.

$$(a + b)' = a'b' \Leftrightarrow (a + b) = (a'b')'$$

Ahora, de la página 188, $p'q' = p_N q$; por tanto, sustituyendo p' por $(a'b')'$ y q' por $(ab)'$, tendremos:

$$u = (a'b')_N(ab) = (a_N b)_N(ab) \qquad (2)$$

[Alternativamente, podemos decir directamente que «ni $a'b'$ ni ab» implica «ambos $(a'b')'$ y $(ab)'$», esto es, $(a'b')'(ab)'$.]

Tan poco prometedoras como parecían (1) y (2), son justamente lo que necesitamos.

Comencemos por construir nuestro semisumador (Fig. 11.26).

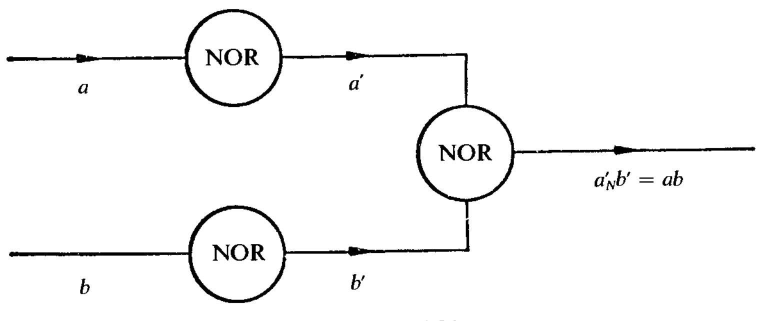


Figura 11.26

Este tipo de circuito (Fig. 11.26) no sólo da el dígito de acarreo, sino que también da parte del dígito unidad. La otra parte del dígito unidad es $a_N b$ dado por la figura 11.27.

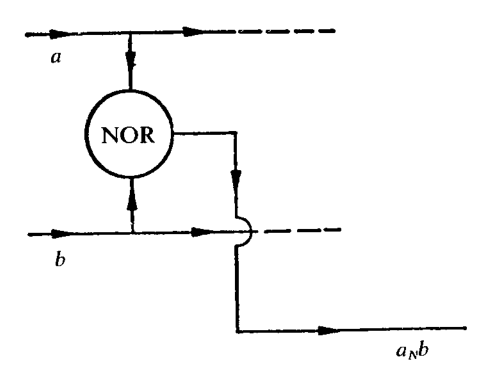


Figura 11.27

Finalmente, para la unidad, necesitaremos una puerta NOR más que nos dé $(a_N b)_N(ab)$. Por tanto, tendremos el circuito completo del semisumador en la figura 11.28.

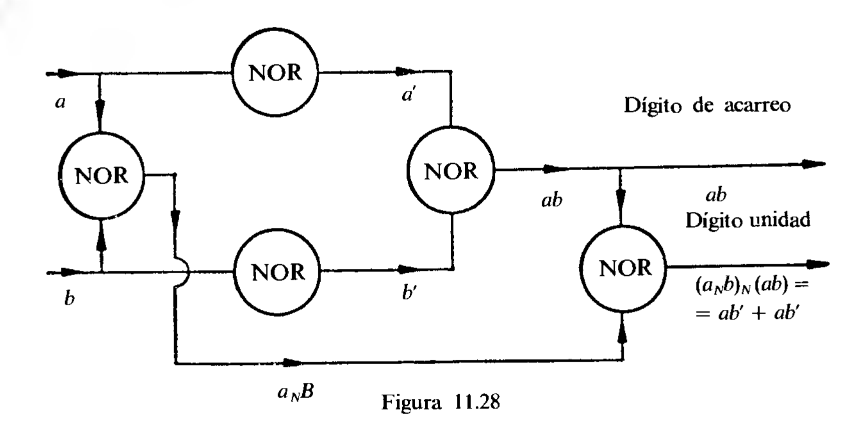


Figura 11.28

Se necesitan cinco puertas NOR juntas para el semisumador.

Ahora extenderemos la construcción de circuitos NOR a un sumador completo binario. El principio es exactamente el utilizado en el apartado 11.5 para la conexión de dos semisumadores binarios. Comenzaremos por redibujar la figura 11.24 y usar nuestro símbolo de semisumador (Fig. 11.23). Así obtendremos la figura 11.29.

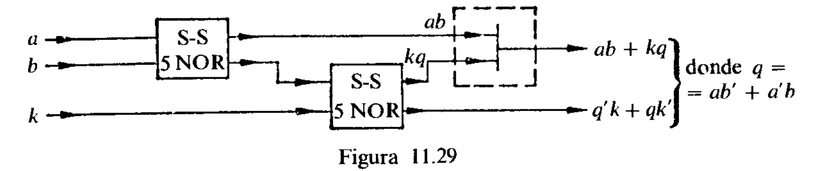


Figura 11.29

Para completar nuestro problema debemos convertir nuestra puerta OR (encerrada en línea discontinua, figura 11.29) en puertas NOR. Esto se hace en la figura 11.30.

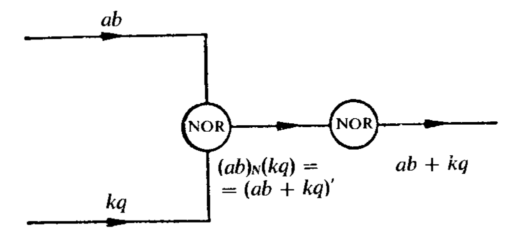


Figura 11.30

La primera puerta NOR convierte las entradas *ab* y *kq* en

$$(ab)_N(kq) = (ab')(kq)' = (ab + kq)'$$

y la segunda puerta NOR se convierte en $ab + kq$. Tenemos, por tanto, el sumador completo (Fig. 11.31).

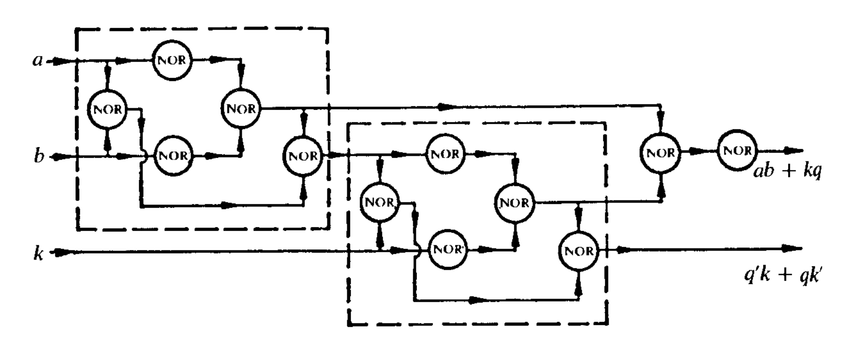


Figura 11.31

Así, para un sumador completo, son necesarias 12 puertas NOR, comparadas con las nueve utilizadas en la figura 11.25. No obstante, en la figura 11.31 se representa un sistema de considerable interés, como ya ha sido mencionado.

11.7. Computador de adición binaria

Completamos nuestros estudios de teoría de circuitos dibujando un sistema para sumar dos números binarios con un máximo de cuatro dígitos cada uno. Es evidente que el sistema puede ser ampliado indefinidamente (Fig. 11.32). La columna de los unos necesita solamente un semisumador, ya que no hay acarreo que introducir. El resto de las otras columnas necesitan sumadores completos. La máquina sumará dos números tales como 1110 + + 1101 y dará la respuesta como 11011.

EJERCICIO 11.2

1. Probar, mediante la construcción de tablas de verdad, las fórmulas:

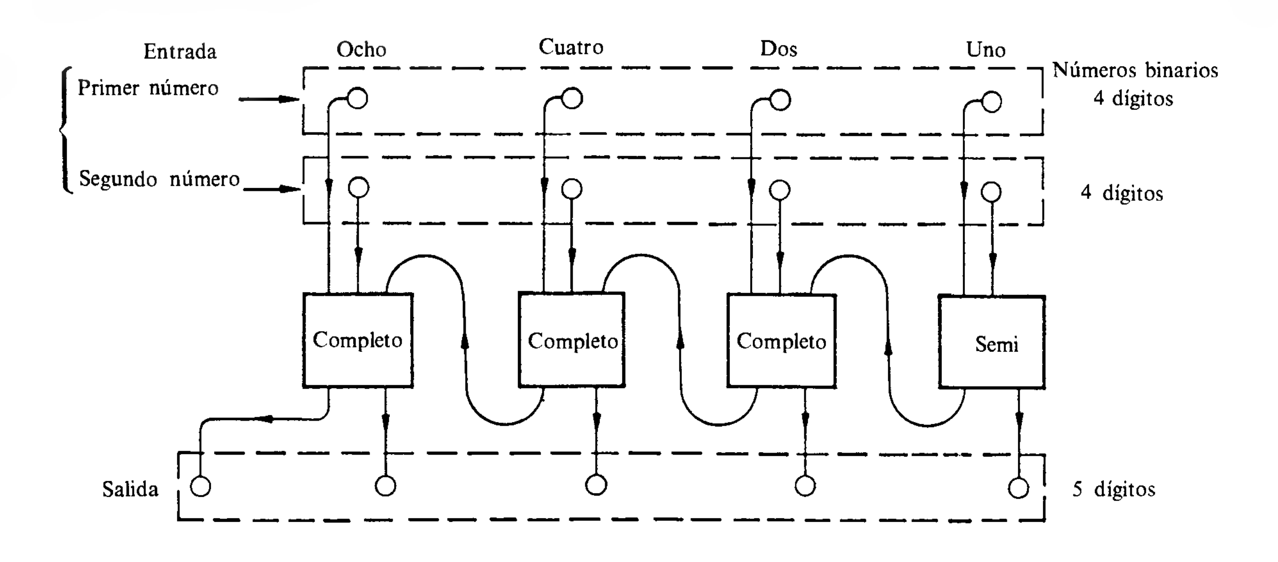

Entrada
Primer número
Segundo número
Ocho
Cuatro
Dos
Uno
Números binarios
4 dígitos
4 dígitos
Completo
Completo
Completo
Semi
Salida
5 dígitos

Figura 11.32

1) $u = abk + ab'k' + a'bk' + a'b'k.$
2) $c = abk' + ab'k + a'bk + abk.$

para el dígito unidad y el dígito acarreo, respectivamente, cuando tres dígitos binarios, a, b y c, se suman juntos (Ap. 11.5).

2. Muestre que, para el computador de la figura 11.32, la mayor entrada numérica, expresada en base diez, es de 15 cada una, y la mayor salida de 30. ¿Por qué no puede obtenerse en este caso concreto 31?

3. *a*) ¿Qué figura muestra exactamente la construcción de una puerta AND usando solamente puertas NOR? *b*) Dibuje una figura para una puerta OR, usando puertas NOR, con dos entradas y una salida cada una. *c*) Si las puertas NOR no necesitan tener dos entradas en cada caso, ¿podemos construir una puerta OR usando un número menor de puertas NOR que en el caso *b*) anterior?

4. Dibuje de memoria las figuras para:

a) un semisumador binario usando seis puertas;
b) un semisumador binario usando puertas NOR solamente;
c) un sumador completo usando solamente puertas NOR.

5. Pruebe, mediante la construcción de tablas de verdad u otro modo, que:

a) $a + b = (a_N b)_N (a_N b).$
b) $(a + b)' = a_N b.$
c) $ab' + a'b = (a + b)(ab)'.$

12 Matrices

12.1. Matrices

Suponga que consideramos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y:

$$3x + y = 5$$
$$4x - y = 2$$

Los coeficientes de x e y pueden escribirse en una formación rectangular sin alterar sus posiciones relativas de la ecuación. Así:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Tal formación se denomina *matriz*. De hecho, podemos escribir el par de ecuaciones como una única ecuación de matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Esto sugiere la «razón de ser» del álgebra matricial. En aerodinámica, por ejemplo, un sistema con gran número de ecuaciones lineales con un alto número de incógnitas, puede ser sustituido por una única ecuación matricial. Sin embargo, esto sería de poco valor, a menos que pudiésemos encontrar reglas y métodos para

operar con matrices. De acuerdo con esto, comenzaremos por estudiar las propiedades de estas formaciones.

Definición. Una matriz es una formación rectangular de números. Una matriz de m por n (escrito: matriz $m \times n$) tiene m filas y n columnas. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ es una matriz } 2 \times 3 \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ es una matriz cuadrada } 3 \times 3 \qquad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ es una matriz } 3 \times 2 \qquad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \text{ es una matriz fila } 1 \times 3 \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ es una matriz columna } 3 \times 1 \qquad (5)$$

Ya estamos familiarizados en matemáticas con la idea de trazar modelos rectangulares. Por ejemplo, $2 \times 3 = 6$ puede representarse como:

● ● ●

● ● ●

La analogía con el álgebra matricial es grande. Así, una matriz 2×3 tiene seis elementos (compárese con la matriz (1) anterior). De igual modo, una matriz 3×2 tiene seis elementos (cotéjese con la matriz (3)), pero esta vez los elementos están colocados de distinta forma.

En general, una matriz puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

y algunas veces simbólicamente $[a_{mn}]$, pero la investigación del caso general requière cierta destreza en matemáticas y está más bien alejado del alcance de este libro. Restringiremos nuestra investigación a matrices no mayores de 3×3, excepto cuando referencias al caso general no presenten dificultad. Generalmente se utilizan letras mayúsculas en negrita para representar matrices; por ejemplo, tres matrices podrían representarse por **A**, **B** y **C**.

12.2. Propiedades elementales

La posición de un elemento en una matriz es de importancia fundamental. Si son intercambiados elementos distintos, la matriz también cambia. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

son todas matrices distintas.

Dos matrices son idénticas si y sólo si cada elemento de una es igual al correspondiente elemento de la otra. Usando la notación simbólica del apartado anterior, si

$$\mathbf{A} = [a_{mn}] \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = [b_{mn}]$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow [a_{mn}] = [b_{mn}]$$

$$a_{rs} = b_{rs}$$

para todo $1 \leqslant r \leqslant m$, $1 \leqslant s \leqslant n$. donde r, s, m y n son enteros. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

si y sólo si

$$a_{11} = b_{11} \ , \ a_{12} = b_{12} \ , \ a_{13} = b_{13}$$
$$a_{21} = b_{21} \ , \ a_{22} = b_{22} \ , \ a_{23} = b_{23}$$

A la vez, por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} x & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = 1 \quad \text{e} \quad y = 2$$

Dos matrices no pueden ser iguales a menos que tengan el mismo número de filas (o sea, m) y el mismo número de columnas (o sea, n). Así:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

donde el signo $\neq$ significa «no igual».

La suma (o sustracción) de matrices es sencilla, pero solamente puede realizarse si las matrices son del mismo orden (es decir, $m \times n$), esto es, cuando tienen el mismo número de filas y columnas. Los elementos correspondientes se suman (o, en el caso de la sustracción, los elementos se restan).

Ejemplo.

$$[4 \ -3] + [-2 \quad 6] + [1 \quad 0] = [4 - 2 + 1 \quad -3 + 6 + 0] =$$
$$= [3 \quad 3]$$

Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & 2+1 \\ -1+1 & 0+5 \\ 0+3 & 5-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Los pasos intermedios podrán ser omitidos después de un poco de práctica.

No podemos sumar

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

porque aunque el número de filas es el mismo (dos), el número de columnas no lo es (dos en la primera y una en la segunda).

En el teorema siguiente estableceremos que unas matrices son compatibles si éstas se pueden sumar.

Teorema. La suma de matrices compatibles es conmutativa, esto es:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Probaremos esto para el caso general de matrices de 2×2. Suponga

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Ahora,

$$\mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \quad \text{(ya que cada elemento permanece inalterado)}$$

$$= \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

Es obvio que podemos proceder exactamente del mismo modo para cualesquiera matrices $m \times n$, y que el proceso puede ser extendido a la suma de tres o más matrices, por ejemplo:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{A} \text{ , etc.}$$

Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} x^2 + 2x - 5 \\ y^2 + 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5x + 5 \\ 2 - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 7x \\ y^2 - y + 3 \end{bmatrix}$$

Observe que éstas son matrices columna y que el hecho de que los elementos sean expresiones algebraicas no afecta a las reglas de las matrices.

Una matriz con todos sus elementos cero se llama matriz cero. Si a una matriz dada **A** se le suma la matriz cero, el valor de la primera no cambia; por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pero, como en el trabajo precedente, nuestra matriz cero ha de ser compatible, esto es (en el caso de suma o sustracción), debe tener el mismo número de filas y columnas que la matriz a la que se la sumamos. En general:

$$\mathbf{A} + \boldsymbol{\phi} = \mathbf{A}$$

donde **A** es una matriz $m \times n$ y $\boldsymbol{\phi}$ es la matriz cero $m \times n$ correspondiente.

EJERCICIO 12.1

1. Escriba ejemplos de:

a) una matriz cuadrada 2×2; *b*) una matriz (fila) 1×3; *c*) una matriz (columna) 2×1; *d*) una matriz cuadrada 3×3; *e*) una matriz 2×3; *f*) una matriz 2×3.

[*Indicación:* Un ejemplo de una matriz fila 1×3 sería $[-2 \quad 0 \quad 5]$.]

2. Si la matriz **A** se expresase por la notación abreviada $\mathbf{A} = [a_{mn}]$, ¿cuántas filas y columnas tendría si fuese $m = 5$, $n = 3$?

3. Establezca si las siguientes matrices se pueden sumar. En todos los casos donde sea posible realizarlo, simplifique el resultado:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

c) $[3 \quad 1 \quad -4] - [-2 \quad -1 \quad 3] + [-5 \quad 0 \quad 2]$

d) $[4 \quad 2] + [3 \quad -7] - [0]$

e) $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

4. De las siguientes ecuaciones matriciales, determine los valores de x e y:

a) $\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3x \\ y^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3x + 2 & 7 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - 1 & 7 \\ -2 & y \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} x+2y & 14 \\ -3 & y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ -3 & 7+3x \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & x^2+12 \\ x+4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7x \\ x+4 & 3 \end{bmatrix}$

5. Estudiar si se puede encontrar el valor de x e y en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 4x^2 & 5 \\ 3 & y+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 3 & y+2 \end{bmatrix}$$

12.3. Multiplicación de matrices por números reales

Considere el caso

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

haciendo uso de las reglas de los apartados 12.1 y 12.2. Ahora las matrices del lado izquierdo son las mismas. Así, podremos escribir:

$$2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

El resultado es perfectamente generalizable, aunque bastante tedioso de probar, esto es, multiplicar una matriz por un número p es multiplicar cada elemento de la matriz por p. Por tanto, en nuestra forma general, usada antes, si $\mathbf{A} = [a_{mn}]$, entonces $pA = p[a_{mn}] = [pa_{mn}]$.

Escrito por completo será:

$$p\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa_{11} & pa_{12} & \cdots & pa_{1m} \\ pa_{21} & pa_{22} & \cdots & pa_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ pa_{m1} & pa_{m2} & \cdots & pa_{mn} \end{bmatrix}$$

Podemos pensar en la sustracción como si la matriz sustraendo fuese multiplicada por -1 y sumada después, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que está de acuerdo con las reglas dadas para la sustracción en el apartado 12.2 anterior. Adviértase que ponemos el factor -1 entre paréntesis para evitar que sea confundido con $[-1]$, que en un capítulo sobre matrices querría decir que es una matriz 1×1.

Ejemplo. Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

encontrar $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$.

Tendremos:

$$2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 9 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -11 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Definición. Una matriz simétrica es una matriz cuadrada (no puede ser de otra clase), que permanece inalterada (no varía) cuando se intercambian sus filas por sus columnas; por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz simétrica.}$$

En general, la matriz cuadrada $[a_{nn}]$ es simétrica si $a_{rs} = a_{sr}$, donde $1 \leqslant r \leqslant n$ y $1 \leqslant s \leqslant n$.

EJERCICIO 12.2

Multiplique (1 a 4) y simplifique cuando sea posible:

1. $5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ **2.** $-4\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

3. $2\begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

4. $3\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ 4 & 12 & 0 \end{bmatrix}$

5. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 6y \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-y & 9 & -21 \\ 12 & 0 & 36 \end{bmatrix}$ y si $3\mathbf{A} = \mathbf{B}$, encuentre x e y.

6. Exprese las siguientes matrices como múltiplos de otras más sencillas:

a) $\begin{bmatrix} 17 & 51 \\ -34 & 5 \end{bmatrix}$; *b*) $\begin{bmatrix} 91 & 63 & -56 \\ 49 & 0 & -98 \end{bmatrix}$.

12.4. Multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices tiene un lugar importante en las matemáticas modernas. Es, sin embargo, más exigente que el proceso de la suma, por lo que será necesario tener cuidado al estudiar esta sección. Una vez que se domine el procedimiento, no habrá dificultad en su aplicación.

Considere el siguiente problema doméstico: la señora Newton, que tiene una mente matemática, compra algunos comestibles, concretamente 3 kg de mantequilla, 1 kg de té y 2 kg de queso, apuntando su compra como una matriz fila:

$$[3 \quad 1 \quad 2]$$

El precio de sus compras son los siguientes:

Mantequilla:	150 ptas/kg
Té:	300 ptas/kg
Queso:	200 ptas/kg

que ella anota como una matriz columna:

$$\begin{bmatrix} 150 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

El total de la compra es el producto de las dos matrices que la señora Newton ha construido, concretamente:

$$[3 \quad 1 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 150 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Nosotros ya sabíamos, por aritmética elemental, que el coste total es la suma de los productos de cada elemento en la primera matriz fila por los correspondientes elementos en la segunda matriz columna, esto es:

$$[3 \times 150 + 1 \times 300 + 2 \times 200] = [1.150]$$

que da un total de 1.150 pesetas. Sin dudar, el señor Ramsbottom, el tendero de mente práctica, cuyas dotes mentales en matemáticas son limitadas, ha realizado sus cálculos por su cuenta. ¡incluso sin darse cuenta que estaba recurriendo al álgebra de matrices!

Suponga, como la señora Newton, que especulamos sobre si podemos extender la multiplicación de los elementos de las filas de una primera matriz por los elementos de las columnas de una segunda matriz, que se multiplican entre sí. Lo siguiente pudiera aparecer como lógico: si **A** y **B** son matrices compatibles (y la compatibilidad en multiplicación aún debe ser definida), entonces:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \text{1.ª fila} \times \text{1.ª columna, 1.ª fila} \times \text{2.ª columna, ...} \\ \text{2.ª fila} \times \text{1.ª columna, 2.ª fila} \times \text{2.ª columna, ...} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times 3 - 2\times 2 & 4\times 1 - 2\times 5 \\ -1\times 3 + 0\times 2 & -1\times 1 + 0\times 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Más genéricamente, para una matriz cuadrada de 2×2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Esto es, el procedimiento consiste en multiplicar cada elemento de la primera fila de la primera matriz por el correspondiente elemento de la primera columna de la segunda matriz y sumar los resultados, obteniendo así el primer elemento de la primera fila de la matriz final. Esta rutina es aplicada de nuevo usando la primera fila de la primera matriz y la segunda columna de la segunda matriz, obteniendo así el segundo elemento de la primera fila de la matriz final. Habiendo completado la primera fila de la matriz final, comenzamos otra vez usando la segunda fila de la primera matriz y la primera columna de la segunda matriz para obtener el primer elemento de la segunda fila de la matriz final, y así sucesivamente.

Suena terrible, pero no es difícil realmente. Uno o dos ejemplos más clarificarán el método.

Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 3 \\ -5 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}[3 \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El caso general para una matriz 3 × 3 se da completo a continuación:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

Aún no hemos considerado si hay algún «pero» en todo esto. Todo marchaba bien mientras estábamos multiplicando las matrices anteriores, pero había una regla esencial que nosotros hemos respetado cuidadosamente (regla que hasta el momento no se ha mencionado).

Regla. Dos matrices se pueden multiplicar si y sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda.

En otras palabras, si **A** y **B** son dos matrices que se multiplican en el orden **A** × **B**, entonces el resultado no tendrá sentido, a menos que **A** sea una matriz $m \times p$ y **B** sea $p \times n$, donde p es el mismo en ambos casos. Cuando esta condición sea satisfecha, la matriz resultante **C** será una matriz $m \times n$. Simbólicamente podemos escribir:

$$[a_{np}] \times [b_{pn}] = [c_{mn}]$$

donde, por supuesto, cada c ha de ser calculado.

Obsérvese bien que de esto no se sigue que **B** × **A** exista necesariamente, y si existe, es muy improbable que sea lo mismo que **A** × **B**. Si **A** = $[a_{mn}]$ y **B** = $[b_{nm}]$, entonces **A** × **B** y **B** × **A** existirán, siendo **A** × **B** una matriz cuadrada de $m \times m$ y **B** × **A** una matriz cuadrada de $n \times n$.

Ejemplo. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Encontrar $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$. ¿Qué se puede deducir de estos resultados?

Primeramente observamos que $\mathbf{A}$ es una matriz 2×3, y $\mathbf{B}$ es 3×2. Por tanto,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = [a_{23}] \times [b_{32}] = [c_{22}] \quad \text{matriz de } 2 \times 2$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = [b_{32}] \times [a_{23}] = [d_{33}] \quad \text{matriz de } 3 \times 3$$

donde los elementos de $[c_{22}]$ y $[d_{33}]$ han de ser calculados.

Se ve enseguida que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$, esto es, en general la multiplicación de matrices no es conmutativa, siendo ésta la deducción por la que se nos preguntaba.

Finalmente,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 30 & 14 \end{bmatrix}$$

Nota: Existen notaciones ligeramente distintas para la multiplicación de matrices, como $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{AB}$, pero en todos los casos el orden de las matrices se mantiene. (Así, por ejemplo, se cumple que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.)

EJERCICIO 12.3

1. Establezca cuáles de las siguientes multiplicaciones de matrices están permitidas, calculando la matriz resultante cuando sea posible:

a) $[5][-3]$; *b*) $[2 \quad -1]\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$; *c*) $[32]\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}[4 \quad 3]$; *e*) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$; *f*) $[3 \quad 0 \quad -5]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}[54]$; *h*) $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}[3]$; *i*) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Si $\mathbf{A} = [2 \quad 1 \quad 0]$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, encontrar **AB** y **BA**.

3. Dados

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

¿tienen sentido **PQ** y **QP**? Si es así, exprese el resultado (o resultados) como una matriz (o matrices).

4. Simplifique:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Si

$$\begin{bmatrix} x & a & b \\ c & d & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}[300 \quad -2]$$

encuentre x e y. [*Indicación:* No es necesario encontrar los valores de a, b, c y d aquí, aunque si se desea podríamos calcularlos.]

6. Resuelva

$$3\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

7. Determine a_{32} y a_{21} cuando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

se multiplican para dar **AB**, matriz de 3×3, en la cual el elemento de la fila r-ésima y columna s-ésima es a_{rs}. [Así, para a_{32}, $r = 3$, $s = 2$.]

12.5. Método matricial de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Investiguemos ahora en detalle el método de resolución del sistema de ecuaciones lineales que fue mencionado al principio de este capítulo.

Si aplicamos las reglas de multiplicación de matrices a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{obtenemos:} \quad \begin{bmatrix} 3x + y \\ 4x - y \end{bmatrix}$$

Si el resultado es $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, como en el ejemplo del apartado 12.1, tendremos que

$$\begin{bmatrix} 3x + y \\ 4x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y aplicando la regla de identidad (igualdad) de matrices, tendremos:

$$3x + y = 5 \qquad (6)$$

$$4x - y = 2 \qquad (7)$$

Hemos mostrado así que escribir el par de ecuaciones (6) y (7) anteriores, como:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es matemáticamente posible, pero de momento no parece de mucha ayuda.

Sin embargo, si somos capaces de encontrar una matriz de números (que no incluye ni x ni y) por la que multiplicar ambos lados de la ecuación anterior, de modo que en el lado izquierdo obtengamos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, nuestro problema estará virtualmente resuelto.

Comenzaremos por considerar la matriz simétrica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que llamaremos matriz identidad (o unidad) y designaremos por **I**. Operemos con ella en el caso general de una matriz 2×2 (llamada aquí **A**). Aplicando las leyes de multiplicación de matrices dadas en el apartado 12.4 anterior, obtendremos:

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Así, al operar con la matriz identidad y otra matriz compatible, esta última permanece inalterada. Fácilmente podemos extender este razonamiento probando que

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$$

para cualquier matriz cuadrada **A**, supuesto que **I** es la matriz identidad con la misma dimensión que **A**. Por ejemplo, la **I** de 3 × 3 es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos definir la matriz **I** como aquella matriz cuadrada cuya diagonal principal (del elemento izquierdo superior al derecho inferior) es una serie de unos, y todos los demás elementos son ceros.

En álgebra, si deseamos multiplicar a por un número tal que nos dé 1, vemos enseguida que tal número es $1/a$, ya que

$$\frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Esto se puede escribir como

$$a\ ^{1}a = 1$$

si usamos exponentes.

En álgebra matricial adoptamos una notación análoga:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

donde $\mathbf{A}^{-1}$ podrá calcularse cuando se conozca **A**.

Considérese el sistema de ecuaciones en x e y:

$$ax + by = h$$

$$cx + dy = k$$

que puede escribirse como

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Podremos resolver el sistema si somos capaces de encontrar una matriz $\mathbf{A}^{-1}$ llamada inversa de $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{IX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Supóngase

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{bmatrix}$$

Pero $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ y, por tanto,

$$\begin{bmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la fila superior de esta ecuación matricial obtenemos un sistema de ecuaciones en p y q, concretamente

$$ap + cq = 1 \tag{8}$$

$$bp + dq = 0 \tag{9}$$

Multiplicando (8) por d y (9) por c y restándolas, encontramos que

$$p = \frac{d}{ad - bc}$$

Ahora multiplicando (3) por b y (4) por a y restándolas, obtendremos:

$$q = \frac{-b}{ad - bc}$$

De igual modo, de la última de la ecuación matricial obtenemos un sistema de ecuaciones en r y s, esto es:

$$ar + cs = 0 \tag{10}$$

$$br + ds = 1 \tag{11}$$

Resolviendo estas ecuaciones de forma análoga a las ecuaciones (8) y (9), tendremos:

$$r = \frac{-c}{ad - bc} \quad \text{y} \quad s = \frac{s}{ad - bc}$$

Por tanto, la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ viene dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

La cantidad que queda fuera de la matriz, esto es, $ad - bc$, se llama *determinante* de **A** y se representa por Δ:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

expresión que es fácilmente memorizable. Si $\Delta = 0$, el método no sirve. (Véase el ejercicio 12.4, cuestión 4.]

El método puede extenderse a cualquier sistema de ecuaciones lineales, siempre que el número de incógnitas coincida con el número de ecuaciones. Fue esta extensión y su adaptación computacional lo que condujo al gran interés que existe actualmente por la teoría de matrices.

Resolveremos ahora el ejemplo dado al principio del capítulo, al que ya nos hemos referido en otras ocasiones.

Ejemplo. Resolver

$$3x + y = 5$$

$$4x - y = 2$$

Tenemos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-3-4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

se convierte en

$$\mathbf{X} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -7 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$x = 1 \;, \; y = 2$$

[*Comprobación:* $3 \times 1 + 2 = 5$; $4 \times 1 - 2 = 2$.]

EJERCICIO 12.4

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones 1 a 4, usando matrices.

1. $3x + 2y = 6,\; x + 5y = 2.$

2. $3m + 2n = -1,\; 6(m - n) = 13.$

3. $x + 2y = 2,\; 4y - 3x = 7.$

4. $5x + 4y = 3,\; 10x + 8y = 6.$ ¿Por qué falla el procedimiento? [*Nota:* Éste es un caso de especial importancia.]

$\Delta = 5 \times 8 - 4 \times 10 = 0$, y, por tanto, $1/\Delta$ sería infinito. En estas circunstancias, $\mathbf{A}^{\;1}$ no puede ser determinada y diremos que la matriz **A** es *singular*.

La interpretación de este caso consiste en que realmente no existen soluciones finitas para x e y. Si dibujamos las dos rectas $5x + 4y = 3$, $10x + 8y = 6$, veremos que son paralelas. Se puede decir que se cruzan en el infinito y, por tanto, la solución del sistema dado sería infinita.

5. Si

$$[4a^2 - b^2] \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4a & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & 4a \end{bmatrix}$$

demostrar que $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

12.6. Potencias de una matriz

Hemos considerado la multiplicación de matrices tal como **AB**, cuando **A** y **B** sean compatibles. Consideraremos ahora los casos $\mathbf{AA} = \mathbf{A}^2$ y $\mathbf{AAA} = \mathbf{AA}^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \mathbf{A}^3$. Por simplicidad limitaremos nuestro estudio a matrices 2×2. La teoría se puede extender a matrices de mayor dimensión, pero es de interés advertir que las potencias de **A** (tales como $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$) sólo tienen sentido si **A** es una matriz cuadrada. Esto es claro, ya que $[a_{mn}] \times [a_{mn}]$ sólo tendrá sentido si $m = n$.

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a(a + d) + (bc - ad) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) + (bc - ad) \end{bmatrix}$$

donde hemos insertado artificialmente $+ad - ad$ en dos lugares, con objeto de crear un factor común $[a + d]$, ya presente en dos de los elementos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{bmatrix} =$$

$$= (a+d)\begin{bmatrix} a & d \\ c & d \end{bmatrix} - (ad - bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (a+d)\mathbf{A} - \Delta\mathbf{I}$$

donde aparece la matriz **I**, ya que la expresión está compuesta por matrices, y donde $(a + d)$ es un escalar y Δ está definido tal como se hizo en la página 222. De modo que tenemos la *ecuación característica* de la matriz **A**, esto es:

$$\mathbf{A}^2 - (a+d)\mathbf{A} + \mathbf{BI} = \boldsymbol{\phi}$$

Esto es muy útil para encontrar potencias mayores de **A**. Suponga que multiplicamos la expresión por **A**. Entonces:

$$\mathbf{A}^3 - (a+d)\mathbf{A}^2 + \Delta\mathbf{A} = \boldsymbol{\phi}$$

ya que

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}$$

Por tanto, usando la ecuación característica ya encontrada tendremos:

$$\mathbf{A}^3 - (a+d)\{(a+d)\mathbf{A} - \Delta\mathbf{I}\} + \Delta\mathbf{A} = \boldsymbol{\phi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^3 = \{(a+d)^2 - \Delta\}\mathbf{A} - (a+d)\Delta\mathbf{I}$$

Ejemplo. Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

encontrar $\mathbf{A}^3$.

(Método 1.º) Aquí:

$$a = 3 \;,\; b = -2 \;,\; c = 0 \;,\; d = 1$$

$$a + d = 4 \quad \text{y} \quad \Delta = ad - bc = 3$$

$$\mathbf{A}^3 = (16 - 3)\mathbf{A} - 4 \times 3\mathbf{I} = 13\mathbf{A} - 12\mathbf{I} =$$

$$= \begin{bmatrix} 39 & -26 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -26 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Método 2.º)

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -26 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso, el método directo es ligeramente más corto, pero en general no es necesariamente así.

Volvamos ahora al caso general de una matriz 2×2 y veamos que la ecuación característica nos proporciona un método efectivo y sorprendentemente sencillo para encontrar la inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de $\mathbf{A}$.

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ya sabemos que

$$\Delta\mathbf{I} = (a + d)\mathbf{A} - \mathbf{A}^2$$

Multiplicando por $\mathbf{A}^{-1}$ y advirtiendo que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, tendremos que

$$\Delta\mathbf{A}^{-1} = (a + d)\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

esto es,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ si } \Delta \neq 0$$

resultado ya encontrado en la página 222.

EJERCICIO 12.5

Encuentre las ecuaciones características de las matrices de las cuestiones 1 a 4:

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 2c & a \\ 4c & 2a \end{bmatrix}$

5. ¿Existen las inversas de las matrices **P** y **Q**, siendo

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}?$$

Si es así, escríbalas. [*Sugerencia:* ¿Es $\Delta = 0$?]

6. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & a \\ b & -b \end{bmatrix}$, encontrar $\mathbf{A}^3$ en términos de a y b.

7. Si $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, encontrar $\mathbf{B}^4$ en la forma 49**C**, donde **C** es una matriz. [*Sugerencia:* $\mathbf{B}^4 = \mathbf{B}^2\mathbf{B}^2$.]

8. Resuelva los sistemas de ecuaciones en x e y:

a) $2x - y = 5,\ x + 2y = 3$

b) $ax + by = c,\ bx + 4ay = -2c$

mediante una ecuación matricial de la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, donde **A** es la obtenida en el apartado 12.6 anterior.

12.7. Aplicación de las matrices a las encuestas públicas de opinión

Completaremos este capítulo con una breve referencia acerca de los problemas de la vida real. Supóngase que se realiza una encuesta con una muestra de población, sobre sus puntos de vista acerca del castigo físico de la escuela. Se encuentra que el 40 por 100 está a favor y el resto en contra. Un poco más tarde, la misma muestra de población vuelve a ser preguntada y se descubre que 1/5 de los que originalmente estaban a favor ahora están en contra, mientras que 1/4 de los que originalmente se oponían están ahora a favor.

Sacamos una matriz columna de la primera distribución:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A favor} \\ \text{En contra} \end{matrix}$$

Si consideramos la matriz operante en este caso, tenemos que el problema necesita de una matriz 2 × 2. Originalmente era una matriz identidad (unidad), pero después de la segunda encuesta de opinión ha tenido que ser modificada.

Primera encuesta — Segunda encuesta

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A favor} \\ \text{En contra} \end{matrix} \quad \text{se convierte en } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - 1/5 & 1/4 \\ 1/5 & 1 - 1/4 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz están en la posición correcta, ya que al multiplicar la fila superior por la matriz columna **B** nos dará aquéllos que están a favor del castigo corporal, y la fila inferior nos dará los que están en contra.

Así, tenemos que **IB** se transforma en **AB**.

Encuesta original:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Encuesta nueva:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \times 40 + \frac{1}{4} \times 60 \\ \frac{1}{5} \times 40 + \frac{3}{4} \times 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 53 \end{bmatrix}$$

En lugar de 40 por 100 a favor y 60 por 100 en contra, tenemos 47 por 100 a favor y 53 por 100 en contra.

Si la tendencia se mantuviese en este nivel, después de otro período de tiempo similar, podríamos anticipar la situación del siguiente modo:

$$\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 47 \\ 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37{,}6 + 13{,}25 \\ 9{,}4 + 39{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50{,}85 \\ 49{,}15 \end{bmatrix}$$

Existen ahora un 50,85 por 100 a favor del castigo físico y, por tanto, la opinión pública se ha desviado hacia él.

En la práctica, usualmente, hay gente que no es capaz de decidirse acerca de temas controvertidos. Consideremos ahora un ejemplo en el que se toma en cuenta esta dificultad.

Ejemplo. Una concejalía de distrito desea convertirse en un municipio autónomo, lo que conlleva unos gastos en el nombramiento de un alcalde y una corporación, por un lado, y por otro un mayor estatus para la comunidad que permitirá la prestación de unos servicios públicos más amplios. Una encuesta da como resultado que el 40 por 100 está a favor, el 50 por 100 en contra y el resto está indeciso. Posteriormente se encuentra que 1/10 de los que estaban originalmente a favor están en contra; de los que originalmente estaban en contra, 1/8 ahora están a favor y 1/20 indecisos; de los que originalmente estaban indecisos ahora 1/4 están a favor. No hay otros cambios.

¿Puede la concejalía asumir que la comunidad local, aún sin entusiasmo, tiende a estar a favor del cambio de estatus?

Construyamos la matriz **A** (de 3 × 3 esta vez), con la que vamos a trabajar:

	A favor	En contra	Indecisos
A favor	1 − 1/10	1/8	1/4
En contra	1/10	1 − 1/8 − 1/20	0
Indecisos	0	1/20	3/4
	1	1	1

[Obsérvese que estas columnas sumadas dan 1.]

Por tanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9/10 & 1/8 & 1/4 \\ 1/10 & 33/40 & 0 \\ 0 & 1/20 & 3/4 \end{bmatrix}$$

La matriz **B** con la que vamos a trabajar viene dada por:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A favor} & 40 \\ \text{En contra} & 50 \\ \text{Indecisos} & 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 9/10 & 1/8 & 1/4 \\ 1/10 & 33/40 & 0 \\ 0 & 1/20 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 + 6{,}25 + 2{,}5 \\ 4 + 41{,}25 + 0 \\ 0 + 2{,}5 + 75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44{,}75 \\ 45{,}25 \\ 10{,}00 \end{bmatrix}$$

Esto significa que el 44,75 por 100 está a favor de la recomendación, el 45,25 por 100 en contra y que de nuevo el 10 por 100 de los ciudadanos está indeciso. La concejalía tendrá, por tanto, que abandonar la idea.

EJERCICIO 12.6

1. En Milchester, hipotética pequeña ciudad de provincias, donde los principales miembros del concejo local están llenos de prejuicios, existe un fuerte movimiento tendente a que los ciudadanos dejen de fumar. Sin embargo, antes de utilizar la fuerza, los miem-

bros más moderados del concejo convencen a éste para realizar una encuesta pública sobre el asunto. La primera prueba reveló que el 70 por 100 se oponían a utilizar la fuerza y el resto a favor. Una segunda encuesta, hecha un poco de tiempo más tarde, revela que los que originalmente se oponían, 1/10 estaban ahora a favor, y de los que originalmente estaban a favor, ahora se oponían a utilizar la fuerza 1/3 de ellos. ¿Cuál era la situación después de la segunda encuesta?

Si se realizase una tercera encuesta después de un intervalo de tiempo similar, y asumiendo que el sentimiento en contra de medidas de presión impropias continuaba creciendo en el mismo grado, ¿cuál será la situación?

2. En la misma pequeña ciudad anterior, que sería muy improbable que existiera en la vida real, existe un gran entusiasmo por la construcción de piscinas. Una encuesta de opinión pública dio como resultado que el 55 por 100 estaba a favor, el 20 por 100 estaba indeciso y el resto se oponía. Poco después, un concejal, después de un noche de juerga, deja caer accidentalmente la información de que el proyecto haría subir los impuestos un 25 por 100. Hay una protesta pública y se insiste que se debe realizar otra encuesta. Se encuentra que de los que estaban a favor, 4/5 se oponen ahora; de los que estaban indecisos, 3/4 se oponen ahora; y de los que originalmente se oponían, 1/20 están ahora a favor. No hay más cambios. ¿Cuál es la posición resultante?

3. Los fabricantes de tres clases de detergentes estaban haciendo sus usuales anuncios en competencia. Se realizó una primera encuesta para valorar la situación y se encontró en una muestra de amas de casa que el 39 por 100 preferían Shrinko, el 28 por 100 Rottaway y el resto usaban Skratch. Después de que pasase algún tiempo, se realizó otra encuesta con las mismas amas de casa. De las que originalmente preferían Shrinko, 1/5 prefería ahora Rottaway y 1/10 Skratch. De las que originalmente preferían Rottaway, ahora 1/8 optaban por Shrinko y 1/6 por Skratch. De las que elegieron originalmente Skatch, ahora 1/7 eligió Shrinko y 1/4 Rottaway. Encuentre, con aproximación de dos decimales, el porcentaje de amas de casa que prefieren cada producto.

13 Probabilidad

13.1. Probabilidad de un suceso elemental

Aunque nuestra intención no es introducirnos en el *modus operandi* de los juegos de azar, usualmente se reconoce que el camino más simple para introducir la probabilidad es la utilización de ejemplos con monedas, dados y cartas.

Si nosotros arrojamos una moneda al aire, podemos esperar razonablemente que ésta caiga bien de cara o de cruz. Puede ocurrir, por supuesto, que, con muy mala suerte, caiga sobre un lodazal y se quede de canto, o se pierda de forma irrecuperable por un agujero inconvenientemente cercano, pero nosotros ignoraremos estas tendencias tan antisociales.

Diremos que la moneda hará una de estas dos cosas: salir cara o cruz, que llamamos *suceso seguro*, y al que nosotros definimos con el valor 1. Es razonable presumir que la moneda probablemente podrá dar tanto cara como cruz. Así, la probabilidad teórica de que salga cara es 1/2 y de que salga cruz 1/2, por lo que el suceso seguro será $1/2 + 1/2 = 1$. De nuevo, para las mentes inquisitivas es de interés observar que como los dos lados de la moneda no son exactamente iguales, existirá un muy, pero muy, ligero desequilibrio, y puede ocurrir que aparezca una diminuta desviación hacia las caras, ¡pero es perfectamente ignorable por parte de los capitanes de equipos de fútbol que lanzan la moneda para decidir quién saca!

En la vida real, a menos que el número de tiradas sea muy grande, la distribución de probabilidad práctica que se obtenga,

puede diferir sustancialmente de los resultados teóricos. Después de arrojar 50 veces una moneda como ejemplo, el primer conjunto de resultados fue pobre:

Caras: 20
Cruces: 30

El experimento se repitió y esta vez la moneda cooperó un poco más:

Caras: 26
Cruces: 24

La probabilidad, p, de que un suceso se dé en un experimento viene dada por

$$p = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número total de casos}} = \frac{a}{a+b}$$

donde a es el número de casos favorables y b el de casos desfavorables. Así, en el experimento anterior, de lanzamiento de una moneda, la primera probabilidad práctica de una cara era $20/50 =$ $= 0{,}4$, comparada con la probabilidad teórica que es $1/2 = 0{,}5$. Tabulando los resultados de los dos experimentos tendremos la tabla 13.1.

TABLA 13.1

	Resultados prácticos		Resultados teóricos
	1.ª prueba	2.ª prueba	
Cara	0,40	0,52	0,5
Cruz	0,60	0,48	0,5
Total	1,00	1,00	1,00

Se observará que si sumamos cada columna obtenemos 1,00, esto es, la probabilidad del suceso seguro. Si hubiéramos lanzado la

moneda un número de veces elevado, 1.000 por ejemplo, podríamos haber esperado unos resultados bastante semejantes a los teóricos.

La probabilidad p' de que un suceso no ocurra en un experimento, se define lógicamente como:

$$p = \frac{\text{Número de casos desfavorables}}{\text{Número de casos totales}} = \frac{b}{a + b} = \frac{(a + b) - a}{a + b} =$$

$$= 1 - \frac{a}{a + b} = 1 - p$$

que también podríamos haber visto considerando que:

Probabilidad de que ocurra un suceso + Probabilidad de que no ocurra = Probabilidad del suceso seguro

En la notación de conjuntos, p' es el complementario de p, dentro del suceso seguro, que sería el conjunto universal (= 1).

Se debe aclarar que existen sucesos a los que esta definición no se aplica directamente. Volvamos ahora nuestra atención al juego de un dado, con seis caras numeradas del 1 al 6. Supóngase que se lanza 300 veces, para ver cuántas veces aparece cada cara. Una vez más el autor está en duda con su sufrido hijo, quien obtuvo los resultados en la tabla 13.2.

TABLA 13.2

Tanteo / 300 tiradas	1	2	3	4	5	6	Total
Resultados reales	47	45	58	58	53	39	300
Resultados teóricos	50	50	50	50	50	50	300

El número de veces que salga una determinada cara, teóricamente es de 300/6 (el número de caras), esto es, 50. El número de tiradas no fue excesivamente grande comparado con el número de posibilidades (seis diferentes resultados); aun así el pobre resultado obtenido para el número 6 sugiere que el dado no estaba bien

fabricado. Esto se dedujo mediante la realización de pruebas subsiguientes y por comparación con otro dado. De hecho, se hubieran obtenido resultados menos desviados cotejando la información de un grupo de personas, cada una lanzando un dado diferente, ya que de esta forma los defectos de fabricación habrían tendido a cancelarse.

De los resultados obtenidos, la probabilidad de obtener 1 se ve que es

$$\frac{47}{300} \simeq 0{,}157 \quad \text{y} \quad \frac{50}{300} \simeq 0{,}167$$

respectivamente. Procediendo de igual forma para los demás obtenemos la tabla 13.3.

TABLA 13.3

Probabilidad \ Tanteo	1	2	3	4	5	6
Práctica	0,157	0,150	0,193	0,193	0,177	0,130
Teórica	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167

Seguimos nuestras investigaciones usando ahora una baraja de póquer de 52 cartas.

Ejemplo. De la baraja citada se toma una carta. ¿Cuál es la probabilidad de que sea: *a*) una de corazones; *b*) el rey de corazones; *c*) no figura; *d*) roja?

a) De las 52 cartas, 13 son corazones:

$$p = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

b) De 52 cartas, solamente una (el rey de corazones) es aceptable:

$$p = \frac{1}{52}$$

c) De las 52 cartas, 12 son figuras (reyes, damas y sotas):

$$p' = \frac{12}{52} \quad , \quad \text{esto es,} \quad p = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$$

d) De las 52 cartas, 26 son rojas:

$$p = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Definimos ahora las oportunidades a favor y en contra de que ocurra un suceso:

$$\text{Oportunidades a favor} = \frac{\text{Núm. de casos favorables}}{\text{Núm. de casos desfavorables}} = \frac{a}{b}$$

que usualmente se escribe en la forma $a : b$:

$$\text{Oportunidades en contra} = \frac{\text{Núm. de casos desfavorables}}{\text{Núm. de casos favorables}} = \frac{b}{a}$$

normalmente escrito $b : a$.

Las oportunidades en contra son, por tanto, el recíproco de las oportunidades a favor. Si llamamos a las oportunidades a favor y a las oportunidades en contra, o_f y o_c, respectivamente, se cumplirá:

$$o_f \cdot o_c = 1$$

que es bastante diferente de la relación de probabilidad:

$$p + p' = 1$$

Si

$$p = \frac{a}{a + b}$$

(como antes) tenemos que

$$o_f = \frac{a}{b} = \frac{a}{a+b} \div \frac{b}{a+b} = \frac{p}{p'}$$

Ejemplo. Un jugador saca un as de una baraja de 52 cartas, dejándolo fuera. Otro jugador saca a continuación otra carta. ¿Cuáles son las oportunidades en contra de que esta última carta sea también un as?

Al principio, de las 52 cartas, 4 eran ases. Después de la primera extracción quedan 51 cartas, de las cuales 3 son ases:

$$p = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$$

Las oportunidades en contra de que sea un as son $(17 - 1) : 1$, esto es, $16 : 1$.

Nota: Este problema no es el mismo que aquél en el que se determinan las oportunidades en contra de sacar la primera y la segunda carta ases, antes de que cualquier jugador haya sacado. Una situación más elaborada de este tipo se trata en este capítulo bajo el título de «Probabilidad compuesta».

El primer principio de Laplace es un resumen de las definiciones de este apartado.

Si un suceso puede tener lugar de a maneras y fallar de b maneras, siendo todas equiprobables, tendremos:

La probabilidad de éxito es:	$a/(a+b)$.
La probabilidad de fracaso es:	$b/(a+b)$.
Oportunidades a favor:	$a : b$.
Oportunidades en contra:	$b : a$.

EJERCICIO 13.1

1. Un muchacho que ha lanzado una moneda seis veces y ha sacado cara en las seis ocasiones, lanza la moneda una séptima vez. ¿Cuál es la probabilidad de que saque cara?

2. Arroje 100 veces un dado. Sume el número de veces que salgan 2 y 3. Exprese este resultado como una probabilidad práctica, con decimales. ¿Cuál es la probabilidad teórica? Encuentre el error de la probabilidad práctica (esto es:

$$\frac{\text{Diferencia entre probabilidad teórica y práctica}}{\text{Probabilidad teórica}} \times 100)$$

3. Jones y Smith juegan un curioso juego de azar. Jones tiene una baraja de póquer de la cual se han quitado los reyes, damas, sotas, dieces y nueves. Los ases cuentan como unos. Smith tiene un dado normal. Jones saca una carta a la vez que Smith tira su dado. Si el primero saca una carta con número primo, gana, a menos que el segundo saque también un número primo con su dado, en cuyo caso sería empate. A la inversa, el segundo ganará cuando saque un número primo en su dado sin que el primero saque un número primo con su carta. Si Jones repone la carta extraída y baraja antes de volver a extraer de nuevo, ¿quién es más probable que gane en una tarde de partida?

4. De una baraja de póquer de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar una carta, ésta:

a) Sea una figura roja (figuras son los reyes, damas y sotas).
b) Tenga un número que sea múltiplo de 3 ó 5? (en este sentido, sotas, damas y reyes no tienen número).

5. Se extraen dos cartas de una baraja de póquer de 52 cartas, poniéndose ambas descubiertas en una mesa. Se observa que son el dos y tres de tréboles. Si éstas se dejan fuera de la baraja, ¿qué probabilidad hay de que la siguiente carta extraída sea: *a*) un trébol; *b*) un tres; *c*) una carta negra?

6. Una bolsa contiene seis bolas blancas y cinco rojas del mismo tamaño. Se extraen tres bolas sin reposición, saliendo rojas las tres. ¿Qué probabilidad hay de que la siguiente bola que se extraiga sea blanca? ¿Cuáles son las oportunidades a favor de que esto suceda?

Si se vuelven a meter en la bolsa todas las bolas, ¿cuál es el menor número de bolas que se necesita extraer para que sea seguro obtener: *a*) tres bolas blancas; *b*) tres bolas de un solo color?

13.2. Sucesos incompatibles (ley de suma de probabilidades)

Supóngase que deseamos conocer la probabilidad de obtener 7 con una sola tirada de un par de dados. Los posibles resultados con éxito serían:

$$(1,6)\ ,\ (2,5)\ ,\ (3,4)\ ,\ (4,3)\ .\ (5,2)\ ,\ (6,1)$$

donde el primer número de cada par corresponde al primer dado y el segundo número al segundo dado. Tenemos, pues, seis casos posibles de éxito, cada uno de los cuales excluye que ocurre cualquiera de los otros al mismo tiempo. El total de casos posibles es de $6 \times 6 = 36$, ya que cada dado tiene seis caras, cualquiera de las cuales puede salir. La probabilidad de éxito es, por tanto:

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Éste es un caso particular del *segundo principio de Laplace*, que puede enunciarse como sigue: si un suceso puede ocurrir de varias formas, excluyendo cualquiera de ellas a las restantes, la probabilidad p de que ocurra el suceso es la suma de las probabilidades $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ de las distintas formas en que el suceso puede ocurrir, esto es:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$$

Demostración. Supóngase que el suceso puede darse de n formas diferentes, cuyas respectivas probabilidades son a_1/t, a_2/t, ..., a_n/t, donde a_1, a_2, ..., a_n y t son números enteros (si no lo fuesen al comenzar, entonces nosotros los pondríamos como enteros, como en este ejemplo: 2/15, 0,4, 0,01 los expresaríamos así: 40/300, 120/300, 3/300. En total hay t formas equiprobables, de las cuales el suceso ocurrirá en a_1, a_2, ..., a_n formas, pero como cada una de ellas excluye por completo al resto, deben ser todas casos diferentes y su número total es $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. La probabilidad de que ocurra el suceso es así:

$$p = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{t} = \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t} + \cdots + \frac{a_n}{t} = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

(Para el ejemplo que dábamos entre paréntesis sería:

$$\frac{40 + 120 + 3}{300} = \frac{163}{300}.)$$

Ejemplo. Se tiran tres dados a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea 16 como mínimo?

Las formas en que esto puede ocurrir se tabulan a continuación:

16	17	18
(6, 5, 5)	(6, 6, 5)	(6, 6, 6)
(5, 6, 5)	(6, 5, 6)	
(5, 5, 6)	(5, 6, 6)	
(6, 6, 4)		
(6, 4, 6)		
(4, 6, 6)		
6 +	3 +	1 = 10 casos

Ahora bien, el número total de casos posibles es $6^3 = 216$, luego

$$\text{Probabilidad de éxito} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

EJERCICIO 13.2

1. En una sola tirada de un par de dados, ¿qué probabilidad hay de obtener: *a*) una pareja (esto es, el mismo número en ambos dados); *b*) un total de 8?

2. Tres dados se tiran juntos. ¿Cuáles son las oportunidades en contra de que el total sea 7? ¿Qué probabilidad hay de obtener 1 - 2 - 3? (esto es, que un dado saque 1, otro 2 y otro 3).

3. Un dado se tira dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las dos tiradas sea menor que 10?

4. Se arrojan al aire tres monedas a la vez. ¿Cuáles son las oportunidades en contra de que salgan dos cruces y una cara?

5. Doce personas se sientan alrededor de una mesa redonda, dos de ellos son Mary y Harry. ¿Qué oportunidades hay en contra de que Harry se siente junto a Mary, asumiendo que no existe una razón particular por la que él deba hacerlo?

13.3. Sucesos independientes (ley de multiplicación de probabilidades)

Unos sucesos son independientes cuando el hecho de que ocurra uno de ellos no afecta para nada el que se produzcan o no los otros.

Suponga que para ganar una apuesta es necesario conseguir un 6 con una sola tirada de un dado y sacar cara con una sola tirada de una moneda. Son posibles seis resultados con el dado y dos con la moneda:

$$(1, c) \ , \ (2, c) \ , \ (3, c) \ , \ (4, c) \ , \ (5, c) \ , \ (6, c)$$

$$(1, k) \ , \ (2, k) \ , \ (3, k) \ , \ (4, k) \ , \ (5, k) \ , \ (6, k)$$

donde c y k son cara y cruz, respectivamente. En total hay $6 \times 2 = 12$ resultados posibles, de los cuales solamente uno es ganador. La probabilidad de éxito es, por tanto, de $1/12$. Observamos que esto es lo mismo que el producto de las probabilidades separadas, esto es:

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Consideremos ahora otro ejemplo para ver si esto es probable que sea verdad en general.

Ejemplo. Cierto potentado oriental tiene un sentido del humor ligeramente sádico, acostumbrado a dar a los prisioneros condenados una oportunidad de escapar de la guillotina. El prisionero tiene que pasar a través de una de entre tres puertas A, B y C. Entrar por dos de ellas resulta inofensivo, pero por la tercera es desastroso. Habiendo pasado con éxito la primera prueba, el prisionero ha de pasar por otra puerta más de otro conjunto de tres D, E y F.

En esta ocasión, una no representa ningún peligro, pero las otras dos le conducirán a un desenlace fatal. Después de esto, si el prisionero aún está vivo, será liberado. «Mira qué generosa oferta —le dice el poderoso príncipe—, dado que tres de las seis puertas son seguras para ti, tienes las mismas oportunidades de vivir que de morir.» ¿Pero era esto verdad?

Considere los pares de puertas por los que el prisionero puede ir, una del primer grupo de tres (A, B, C) y otra del segundo grupo (D, E, F). Tendremos los siguientes pares ordenados:

$$\underline{(A, D)},\ (A, E),\ (A, F)$$
$$\underline{(B, D)},\ (B, E),\ (B, F)$$
$$(C, D),\ (C, E),\ (C, F)$$

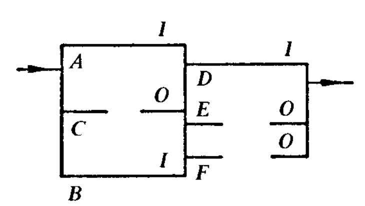
Supongamos que las seguras en el primer grupo son A y B, siendo D la segura del segundo. Entonces las únicas rutas seguras son las que están subrayadas, esto es, de nueve probabilidades, dos son las correctas. La probabilidad de éxito es, por tanto, dos y las oportunidades no son iguales, como sugirió el potentado tan engañosamente, ya que hay 7 : 2 en contra de sobrevivir.

Consideremos ahora las probabilidades de éxito en cada caso. Sea p_1 la probabilidad de éxito en las puertas A, B y C, y p_2 en las puertas D, E y F. Entonces:

$$p_1 = \frac{2}{3} \quad ; \quad p_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow p_1 p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

que concuerda con el resultado obtenido[1]. Es fácil, por tanto, implicar el resultado general: la probabilidad p de un suceso com-

[1] El problema del prisionero será resuelto igualmente fácil utilizando un circuito (véase Cap. 10) como el de la figura. La solución puede verse fácilmente.



puesto, formado de sucesos independientes, es el producto de las probabilidades $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ de estos sucesos independientes, esto es:

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

Ejemplo. Un jugador lanza dos dados a la vez. Ganará si ambos dados salen con números primos. ¿Cuáles son las oportunidades en contra de que gane?

Para cada dado los números primos son 1, 2, 3, 5. Por tanto:

$$p_1 = p_2 = \frac{4}{6} \quad ; \quad p = p_1 p_2 = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Las oportunidades en contra son 5 : 4.

EJERCICIO 13.3

1. Se tira un dado dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar 5 en ninguna ocasión?

Deduzca la probabilidad de sacar por lo menos una vez un 5.

[*Indicación:* La probabilidad de no sacar 5 en cada ocasión es 5/6.]

2. Se lanzan dos dados a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno dé más de 4?

3. John apuesta con Henry de la siguiente forma: John dice: «Un dado tiene seis caras, así que si lo tiras tres veces, tienes exactamente las mismas posibilidades de sacar 6 que de no sacarlo. Te apuesto dinero de forma que si sacas un 6 (o más) en tres tiradas, yo te pagaré, pero si no lo sacas, tú me pagarás a mí». ¿Quién tiene más posibilidades de ganar? ¿Cuáles son sus oportunidades a favor?

[*Indicación:* La argumentación de John es falsa. El suceso de sacar un 6 no excluye el volver a sacar otro 6 en la tirada siguiente; así pues, los sucesos no son excluyentes y, por tanto, no se pueden sumar. Como en la cuestión 1 anterior, consideremos la probabilidad de no sacar 6, esto es, 5/6. En tres tiradas la probabilidad de no sacar ningún 6 es $(5/6)^3$, esto es, la probabilidad de

sacar al menos un 6 será $1 - (5/6)^3$. Se deja al lector completar la cuestión.]

13.4. Sucesos dependientes

El estudio de estos sucesos es realmente una extensión del último apartado, así que el razonamiento utilizado anteriormente será bueno para las condiciones que se enuncian a continuación.

Suponga que los sucesos A y B tienen probabilidades p_1 y p_2, respectivamente, donde p se fija sobre el supuesto de que A ya haya ocurrido. Entonces la probabilidad de que ambos, A y B, ocurran es $p_1 p_2$.

La idea se puede extender a tres o más casos.

Ejemplo. Una pequeña escuela tiene dos clases. Una con 25 chicos y 5 chicas y la otra con 18 chicos y 9 chicas. Se elige una de las clases al azar y se llama a uno de los alumnos. ¿Cuál es la probabilidad de que éste sea una chica?

¿Sería la misma probabilidad si todos hubieran estado en una misma clase?

Como la probabilidad de elegir una clase u otra es la misma, la probabilidad de elegir la primera clase es de 1/2. La probabilidad de que sea una chica, en esta clase, es de 5/30. Por tanto, la probabilidad de que haya salido una chica de esta clase es $1/2 \cdot 5/30$.

De igual modo, la probabilidad de que salga una chica de la segunda clase es $1/2 \cdot 9/27$.

Así, la probabilidad total será:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{27} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Si las clases se hubieran juntado, habrían sido 43 chicos y 14 chicas, por lo que la probabilidad de tener una chica hubiera sido 14/57. Aunque no difiere mucho del resultado previo, no es ciertamente el mismo. La explicación es que la primera elección aleatoria de clase desvía el resultado. Si nosotros solamente hubiéramos pedido que un alumno saliera del colegio, hubiéramos obtenido el segundo resultado, 14/57, ya que cualquier alumno era equiprobable, independientemente de en qué clase se encontrará.

EJERCICIO 13.4

1. De una baraja de póquer se extraen dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean: *a*) el as y el rey de corazones; *b*) ambas de rombos?

[*Indicación:* En *a*) la probabilidad de obtener la primera vez una carta que sirva es de 2/52, ya que tanto el as como el rey sirven; la probabilidad de obtener la segunda carta correcta es 1/51, ya que hemos elegido una de las dos cartas posibles; la otra se queda automáticamente determinada por las restantes 51 cartas.]

2. Se sacan tres cartas de una baraja de póquer. ¿Cuáles son las oportunidades en contra de que sean: el rey, la dama y la sota de tréboles?

3. De una bolsa que contiene cuatro bolas rojas y tres bolas blancas iguales se sacan dos bolas a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que haya una de cada color?

4. Se sacan a la vez tres bolas de una bolsa que contiene dos bolas rojas, tres blancas y cuatro verdes. Demuestre que las oportunidades en contra de que sea cada una de color son 5 : 2.

5. En unas rebajas especiales se ofrece un gran número de tarjetas postales a bajo precio. Solamente hay tres clases de postales y existe aproximadamente el mismo número de cada clase, pero se han revuelto todas. Un cliente debe, con este precio especial, coger las primeras que elija. Si compra tres, ¿cuál es la probabilidad de que elija una de cada clase?

[*Indicación:* La probabilidad de sacar una postal del primer tipo es p_1; del segundo, p_2, y del tercero, p_3. Como una de éstas seguro que aparece al elegir una postal, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. De tres que saque, el suceso seguro será $(p_1 + p_2 + p_3)^3$. Necesitamos obtener este resultado, y después elegir el término que representa las tres posibilidades. Finalmente establecemos que $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$, ya que todas son equiprobables.

6. Cuatro personas premiadas reciben sus premios de una personalidad muy importante, que no les conoce y que ha olvidado preguntar sus nombres. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro premiados reciban premios equivocados?

[*Indicación:* El primer premio puede darse equivocadamente en tres casos; el segundo en tres casos (vea que son tres, no dos); el tercero y cuarto premio solamente puede darse equivocadamente en un caso para cada uno.]

7. Se escriben los 100 primeros números naturales. Se pide a un amigo que tache dos de ellos. ¿Cuáles son las oportunidades de que la suma de los dos números sea impar?

8. En un guateque hay 29 personas, 17 de las cuales son chicos. Un chico se va a su casa temprano. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos siguientes personas que dejen la fiesta sean un chico y una chica?

9. La probabilidad de que Smith diga la verdad es p_1, y de que la diga Brown es p_2. Suponiendo que se produce cierto suceso: *a*) si Smith y Brown afirman que ha ocurrido, encontrar las oportunidades a favor del suceso; *b*) si Smith asegura y Brown niega que haya ocurrido, encontrar la probabilidad de que sea cierto.

[*Indicación:* Si el suceso es verdad, la probabilidad de que ambos lo aseguren es $p_1 p_2$. Si no es verdad, la probabilidad de que ambos lo digan así es: $(1 - p_1)(1 - p_2)$. Así, las oportunidades a favor serán: $p_1 p_2 : (1 - p_1)(1 - p_2)$.]

13.5. Distribución binomial

Aun siendo de interés los apartados anteriores, tienen una aplicación limitada, principalmente en el campo de los juegos de azar. Veremos ahora si la teoría de probabilidades puede extenderse para cubrir consideraciones más constructivas y prácticas.

Una joven pareja espera tener una familia de cuatro chicos. ¿Cuáles son las expectativas de tener un determinado número de chicos y de chicas? Si la probabilidad de un chico es b y la de una chica g, entonces la situación es $b + g$ para cada nacimiento[2], esto es, $(b + g)^4$ resumiría el problema (para los cuatro nacimientos).

Podríamos multiplicar $(b + g)$ por sí mismo repetidamente, pero

[2] Note que $b + g = 1$ para cada nacimiento, nazca un niño o una niña. También $g = b$, pero es más útil operar como en el texto.

esto sería tedioso, así que utilizaremos el teorema binomial. Para este caso de multiplicación vemos que

$$\begin{array}{ll} (b+g)^0 & 1 \\ (b+g)^1 & 1b + 1g \\ (b+g)^2 & 1b^2 + 2bg + 1g^2 \\ (b+g)^3 & 1b^3 + 3b^2g + 3bg^2 + 1g^3, \end{array}$$

y así sucesivamente. Observaremos ahora que los coeficientes se pueden extender indefinidamente:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

El diagrama se denomina *triángulo místico de Pascal.*

Las correspondencias de b y g son fácilmente obtenibles; por ejemplo, en $(b + g)^5$ comenzamos con b^5, luego b^4g, y así sucesivamente. Así:

$$(b+g)^5 = Ab^5 + Bb^4g + Cb^3g^2 + Db^2g^3 + Ebg^4 + Fg^5$$

donde A, B, C, D, E, F son 1, 5, 10, 10, 5, 1, respectivamente, extraídos del triángulo de Pascal.

La fórmula general del desarrollo binomial se da aquí por interés, pero no necesita recordarse para el trabajo en este libro:

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^{n-r}y^r + \cdots + y^n$$

donde r es $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times r$, y n es un entero positivo.

Podemos ahora decidir acerca de la probabilidad de tener cierto número de bebés de cada sexo en nuestro problema. Asumamos que $b = 1/2$ y $g = 1/2$, esto es, cada sexo es equiprobable en cada nacimiento. Entonces, la probabilidad de tener dos chicos y dos chicas en una familia de cuatro hijos es

$$6b^2g^2 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

De igual modo, la probabilidad de un chico y tres chicas es:

$$4bg^3 = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

y la probabilidad de que sean cuatro chicos será:

$$b^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Uno debe tener en mente que estos cálculos presuponen que no hay tendencias genéticas en la familia que predisponga un resultado en favor de otro. Si esto fuese conocido, es decir, que en generaciones pasadas hubo cinco chicas por cada chico, sería razonable esperar que las probabilidades de tener dos chicos y dos chicas en una familia de cuatro hijos sería de $6b^2g^2$, donde

$$b = \frac{1}{6}\ ,\ g = \frac{5}{6}$$

esto es,

$$6\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{25}{216}$$

13.6. Variaciones y combinaciones

a) *Variaciones.* Llamamos «variaciones de n elementos tomados de r en r» a los distintos grupos de r elementos que pueden formarse de entre los n dados. Dos variaciones son diferentes

cuando uno tiene los mismos elementos o, cuando siendo los mismos sus elementos, no figuran en el mismo orden; se denota por $V_{n,r}$.

Encontrar el valor de $V_{n,r}$ es lo mismo que encontrar el número de modos distintos en que podemos rellenar r sitios con n elementos. El primer lugar puede ser ocupado de n formas, el segundo puede entonces ser ocupado independientemente de $n-1$ formas, ya que uno de los elementos ya ha sido colocado. En total, y sólo con estos dos sitios, tendremos $n(n-1)$ formas. Procediendo de este modo, ocupamos el tercer lugar de $(n-2)$ formas, y así sucesivamente hasta ocupar el sitio r-ésimo, de $(n-r+1)$ formas, ya que éste es el número de elementos que nos queda disponible. Por consiguiente:

$$V_{n,r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3{\cdot}2{\cdot}1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3{\cdot}2{\cdot}1}$$

al multiplicar arriba y abajo por $(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$:

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En particular,

$$V_{n,n} = \frac{n!}{0!} = \frac{n}{1} = n$$

ya que, por convenio, $0! = 1$, siendo $V_{n,n}$ denominada como *permutaciones de n elementos* y denotándose como P_n.

b) *Combinaciones.* Llamamos «combinaciones de n elementos de r en r» al número de grupos de r elementos que pueden formarse con los n dados. Se denota como $C_{n,r}$.

De a), el número total de grupos de r elementos de un conjunto de n eran los $V_{n,r}$, pero ahora no consideramos el orden que guardan los elementos. Por tanto, tenemos que dividir $V_{n,r}$ por el

número de grupos de r elementos que contienen los mismos elementos, esto es, $V_{r,r}(P_r)$. Así:

$$V_{r,r} = r(r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = r!$$

$$C_{n,r} = \frac{V_{n,r}}{V_{r,r}} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Un ejemplo aclarará esto.

Ejemplo. En una competición, cuatro personas A, B, C y D se consideran igualmente merecedores de un premio, pero sólo hay tres premios disponibles. ¿De cuántas formas se pueden elegir a los ganadores (siendo los tres premios iguales)?

Este problema es claramente el de encontrar $C_{4,3}$.

Veamos, sin embargo, primero los $V_{4,3}$, esto es, los distintos grupos de ganadores.

ABC	*ABD*	*ACD*	*BCD*
BAC	*ADB*	*ADC*	*BDC*
BCA	*BDA*	*CAD*	*CBD*
CAB	*BAD*	*CDA*	*CDB*
CBA	*DBA*	*DAC*	*DCB*
ACB	*DAB*	*DCA*	*DBC*

Éstas son todas las diferentes ordenaciones ($V_{4,3} = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$), que serán las que necesitaríamos si los premios fueran distintos. Sin embargo, como los premios son idénticos, sólo hay cuatro diferentes resultados:

ABC *ABD* *ACD* *BCD*

ya que $ABC = BCA = CAB = ACB = CBA$, y similarmente para el resto de los grupos.

Esto concuerda con $C_{4,3}$, que viene dado por:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4 \quad (\text{ya que } 1! = 1)$$

Se pueden encontrar muchas probabilidades relacionando dos variaciones o dos combinaciones, pero no debe deducirse de esto que el número de tales problemas sea necesariamente extenso comparado con el conjunto total de problemas.

Se observará que hemos obtenido, en las $C_{n,r}$, el coeficiente binomial de $x^{n-r}y^r$ del desarrollo de $(x + y)^n$.

Ejemplo. Un barco de guerra dispara sobre una banda de blancos (una banda de anchura despreciable en comparación con la distancia de tiro). La probabilidad de fallar en un solo disparo es a. ¿Cuál es la probabilidad de que en una tanda de n disparos, r se queden cortos (siendo $a = 2/3$)?

La probabilidad de que se quede corto un disparo es a; por tanto, la probabilidad de que se pase (esto es, que vaya demasiado lejos) será $(1 - a)$. Por tanto, necesitamos el término de $a^r(1 - a)^{n-r}$ del desarrollo binomial de $[a + (1 - a)]^n$. Así, la probabilidad pedida es:

$$C_{n,r} \cdot a^r(1 - a)^{n-r} = \frac{n!}{r!(n - r)!} a^r(1 - a)^{n-r}$$

Suponga que en una tanda de ocho disparos se apunta demasiado corto. La probabilidad de que seis de los disparos se queden cortos es, siendo $a = 2/3$:

$$\frac{8!}{6!2!}\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{64}{279} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1.792}{6.561}$$

EJERCICIO 13.5

1. Una moneda se lanza sucesivamente cinco veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras y tres cruces? ¿Es esto lo mismo que tirar a la vez cinco monedas?

2. La probabilidad de que un tubo de televisión se fabrique con calidad aceptable es de 0,8. Se examina una caja con seis tubos. ¿Cuál es la probabilidad de que: *a*) todos los tubos sean de calidad aceptable; *b*) dos de ellos sean defectuosos? (Dé el resultado con tres decimales.)

3. Asumiendo que en un determinado partido de fútbol es igualmente probable que gane el equipo local, o el visitante, o que haya un empate, ¿cuáles son las oportunidades en contra de tener ocho empates en ocho partidos de una copa de fútbol?

4. *Problema de De Méré.* ¿Cuál es la probabilidad de que en 24 tiradas de dos dados el seis doble aparezca al menos una vez? ¿Será una apuesta ganadora o perdedora si apostamos dinero por el éxito?

5. *La cuenta del Bufón y las agujas.* Sobre un papel se dibujan una serie de rectas paralelas, a una distancia de a cm. Una aguja de l cm de larga se tira sobre el papel, sin intención de desviar el resultado. Entonces, la probabilidad p de que la aguja corte una línea está dada por:

$$p = \frac{2l}{\pi a} \quad \text{(se prueba después)}$$

supuesto que $a \leqslant l$. Suponga que de N tiradas, n tienen éxito. Entonces, la probabilidad práctica es n/N, y si N es muy grande, esto será razonablemente preciso, por lo que

$$\frac{n}{N} = \frac{2}{\pi a}$$

dando

$$\pi = \frac{2lN}{an} \qquad (1)$$

Construya los elementos necesarios. Realice el experimento 500 veces y calcule de la fórmula (1) el valor de π.

[*Nota:* La fórmula $p = 2l/\pi a$ es fácilmente demostrable mediante cálculo, pero para aquéllos que la materia sea anatema pueden omitir la demostración.]

Según vemos en la figura 13.1, la aguja tocará la línea XY si cae sobre cualquier parte BCD de AE, donde θ es el ángulo que la aguja forma con XY y $BC = CD = l$.

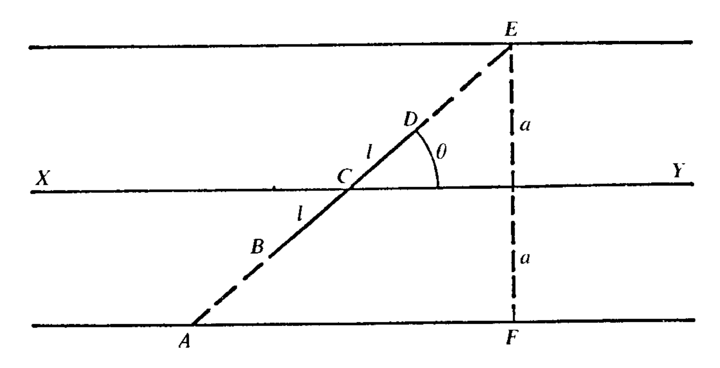


Figura 13.1

Ahora,

$$P_\theta = \frac{BD}{AE} = \frac{2}{EF \operatorname{cosec} \theta} = \frac{l}{a} \operatorname{sen} \theta$$

donde P_θ es la probabilidad de que la aguja toque una línea, en dirección θ.

Sumando para todos los casos $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$:

$$p = \frac{\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{a} (\operatorname{sen} \theta)\, d\theta}{\displaystyle\int_0^\pi d\theta} = \frac{\left[\dfrac{l}{a}(-\cos\theta\right]_0^\pi}{\pi} = \frac{2l}{\pi a}$$

como se quería demostrar.

6. Se tiran cuatro dados a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan: *a*) exactamente dos treses; *b*) por lo menos un par de treses?

7. Una bolsa contiene cinco monedas de 2 pesetas y una de 5 pesetas. Otra bolsa contiene monedas de 2 pesetas. Se sacan al azar cinco monedas de la primera bolsa, introduciéndolas en la segunda, que se remueve a continuación. Se toman ahora cinco monedas de la segunda bolsa y se introducen en la primera. ¿Cuál es la proba-

bilidad de que la moneda de 5 pesetas se encuentre en la primera bolsa?

[*Indicación:* Éste es un ejemplo de sucesos dependientes.]

13.7. Probabilidades y conjuntos

Finalizaremos con algunas notas indicando la relación entre conjuntos y probabilidad. A través del capítulo, nuestra investigación podría haber sido llevada con la notación de conjuntos, pero en muchos sentidos parece más fácil introducir primeramente al estudiante en probabilidad vía las cartas, monedas y dados con los que está más familiarizado.

Introducimos el concepto de *espacio muestral*, U, como el conjunto de posibles resultados para una serie de sucesos. Suponga que retrocedemos al apartado 13.3 de nuevo, donde lanzábamos un dado y una moneda. En lugar de obtener los posibles resultados como pares ordenados, podríamos usar c para caras y k para cruces, y añadir sufijos para indicar el número que el dado ha sacado. Así, c_4 indicará que hemos obtenido cara y un 4 (esto es, $(4, c)$ en la notación del apartado citado). Por tanto,

$$U = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$$

y card (U) sería el número de elementos de U, o sea, 12.

Si p es una afirmación acerca del espacio muestral, definimos P como el conjunto verdad de p y establecemos que éste es el subconjunto de U para el cual p es cierto. Entonces, la probabilidad de p, escrito $\Pr(p)$, se da por[3]

$$\Pr(p) = \frac{\text{card}(P)}{\text{card}(U)}$$

esto es, el número de elementos del subconjunto P dividido por el número de elementos del espacio muestral.

---

[3] La definición concuerda con la relación entre conjuntos y lógica (Caps. 8 y 9).

Ejemplo. Suponga que arrojamos una moneda y un dado. Preguntémonos por la probabilidad de obtener cara y número par.

Tenemos $p =$ «la moneda sale cara y el dado da un número par». Usando los valores de U dados anteriormente,

$$U = \{c_1, c_2, ..., c_6, k_1, k_2, ..., k_6\}$$

tendremos:

$$\Pr(p) = \frac{\text{card}(P)}{\text{card}(U)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

ya que $P = \{c_2, c_4, c_6\} \Rightarrow \text{card}(P) = 3$.

Extenderemos ahora la idea a dos afirmaciones p y q, cuyos respectivos conjuntos verdad son P y Q. Investiguemos card (P) + + card (Q), donde el signo «más» se utiliza en el sentido de la suma aritmética. Existirán dos posibilidades:

1. P y Q tienen elementos comunes (Fig. 13.2).
2. P y Q no tienen elementos comunes (Fig. 13.3).

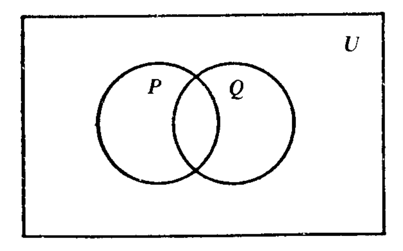


Figura 13.2

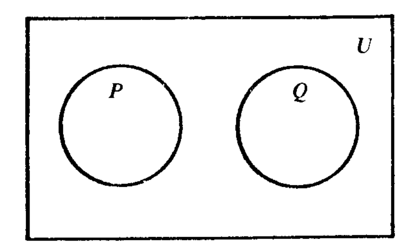


Figura 13.3

1. En el caso de la figura 13.2, los elementos comunes a P y Q deben aparecer dos veces en card (P) + card (Q). Ahora card ($P \cup Q$) debe contar con elementos de P que no están en Q, con elementos de Q que no están en P y (una vez más) elementos comunes a P y Q:

$$\text{card}(P) + \text{card}(Q) = \text{card}(P \cup Q) + \text{card}(P \cap Q)$$

Dividiendo por card (U), tendremos:

$$\frac{\text{card}(P)}{\text{card}(U)} + \frac{\text{card}(Q)}{\text{card}(U)} = \frac{\text{card}(P \cup Q)}{\text{card}(U)} + \frac{\text{card}(P \cap Q)}{\text{card}(U)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pr(p) + \Pr(q) = \Pr(p \vee q) + \Pr(p \wedge q)$$

Un ejemplo aclarará esto.

Ejemplo. Suponga que tomamos dos conjuntos:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{y} \quad Q = \{1, 3, 4, 7\}$$

Entonces,

$$\text{card}(P) = 5 \quad \text{y} \quad \text{card}(Q) = 4$$

$$\text{card}(P) + \text{card}(Q) = 9$$

También

$$\text{card}(P \cup Q) = \text{card}\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} = 7$$

y

$$\text{card}(P \cap Q) = \text{card}\{3, 7\} = 2$$

Luego

$$\text{card}(P \cup Q) + \text{card}(P \cap Q) = 7 + 2 = 9$$

Por tanto,

$$\text{card}(P) + \text{card}(Q) = \text{card}(P \cup Q) + \text{card}(P \cap Q)$$

El estudiante observará que esta parte del teorema es verdad en teoría de conjuntos y que solamente se aplica a probabilidad en los subsiguientes estadios del razonamiento.

2. Discutimos ahora el caso de la figura 13.3, donde P y Q no tienen elementos comunes. Esto es,

$$P \cap Q = \phi \Rightarrow \text{card}(P \cap Q) = 0 \Rightarrow \Pr(p \wedge q) = 0$$

La ecuación de probabilidad anterior se lee:

$$\Pr(p \vee q) = \Pr(p) + \Pr(q)$$

y se puede extender:

$$\Pr(p \vee q \vee r \vee \cdots) = \Pr(p) + \Pr(q) + \Pr(r) + \cdots$$

Ésta es la ecuación para sucesos excluyentes (Cap. 12, Ap. 12.2), que se puede leer: «La probabilidad de un suceso, que puede darse de distintas maneras, excluyendo cada una de las otras, es la suma de las probabilidades por separado». Debe quedar muy claro que $p \wedge q = 0$ implica exclusividad, ya que establece que las afirmaciones p y q no pueden ser verdad a la vez.

Anteriormente hemos constituido lógicamente la regla de la suma cuando los sucesos son exclusivos. Volvamos ahora nuestra atención a los sucesos no exclusivos si podemos deducir la ley del producto del capítulo 12, apartados 12.3 y 12.4.

Supongamos que tienen lugar dos sucesos, siendo U el espacio muestral. Asumimos que p ocurre realmente, por ejemplo, $p =$ «Sacamos una carta de corazones». La probabilidad de q que es «sacar el as de corazones», estará condicionada a p. Se llama probabilidad condicionada de q dado p y se escribe $\Pr(q \mid p)$. Si pensamos un momento sobre esto, veremos que, refiriéndonos al segundo suceso, hemos sustituido el espacio muestral original U por el nuevo espacio muestral P (que resulta ser el conjunto verdad de p y es un

subespacio de U). Por tanto, necesitamos conocer el número de miembros de P que están en Q, esto es, $P \cap Q$:

$$\Pr(q \mid p) = \frac{\text{card}(P \cap Q)}{\text{card}(P)} = \frac{\text{card}(P \cap Q)}{\text{card}(U)} \div$$

$$\div \frac{\text{card}(P)}{\text{card}(U)} = \frac{\Pr(q \wedge p)}{\Pr(p)}$$

Por último, si dos sucesos p y q son independientes (por ejemplo, en lugar de q = «Sacar el as de corazones», dado anteriormente, podríamos tener q = «Una moneda sale cruz», que es completamente independiente de lo que hayamos hecho con la baraja de cartas), entonces la verdad de p no afecta para nada a la verdad de q. Se sigue que

$$\Pr(q \mid p) = \Pr(q)$$

Sustituyendo en la ecuación inmediatamente anterior tendremos:

$$\Pr(q) = \frac{\Pr(p \wedge q)}{\Pr(p)} \Rightarrow \Pr(p \wedge q) = \Pr(p) \cdot \Pr(q)$$

pudiendo generalizarse:

$$\Pr(p \wedge q \wedge r \wedge \cdots) = \Pr(p) \cdot \Pr(q) \cdot \Pr(r) \cdots$$

que se puede leer: «La probabilidad de un número de sucesos independientes es el producto de sus correspondientes probabilidades».

Ejemplo. Se tiran tres dados a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que en los tres dados salga 2 ó 1?

Aquí,

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad ; \quad P = \{1, 2\} \quad ; \quad Q = \{1, 2\} \quad ; \quad R = \{1, 2\}$$

$$\Pr(p) = \frac{\text{card}(P)}{\text{card}(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

De igual forma,

$$\Pr(q) = \Pr(r) = \frac{1}{3} \quad ; \quad \Pr(p \wedge q \wedge r) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

EJERCICIO 13.6

1. En una pequeña escuela con 80 alumnos, seis se llaman Juan y cinco Pedro. ¿Cuál es la probabilidad de que, en el mismo día, el primer alumno en llegar por la mañana se llame Pedro y que el último en dejar la escuela por la tarde se llame Juan?

2. Se lanzan tres dados a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que el tanteo total sea mayor que 14?

3. Se introducen 10 cuentas en un collar, 5 blancas y 5 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que resulten colocadas alternativamente una blanca y otra roja en el collar?

4. Realice tantas cuestiones como sean posibles de los ejercicios 12.5 a 13.3 utilizando la notación de conjuntos.



SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Capítulo 1

Ejercicio 1.1

2. *a*) 13; *b*) 20; *c*) 3; *d*) 10; *e*) 42; *f*) 125; *g*) 35; *h*) 113; *i*) 20; *j*) 132; *k*) 350; *l*) 203.

3. (Base diez) *a*) 9; *b*) 12; *c*) 3; *d*) 6; *e*) 26; *f*) 53; *g*) 23; *h*) 45; *i*) 12; *j*) 56; *k*) 138; *l*) 75.

Ejercicio 1.2

1. *a*) 3; *b*) 3, -2, $1\frac{1}{3}$, $-\sqrt{16}$, 4,3, 0; *c*) 3, -2, $\sqrt{5}$, $1\frac{1}{3}$, $-\sqrt{16}$, 4,3, $2+\sqrt{7}$, 0; *d*) $\sqrt{2}$.

3. 70 y 99; 169 y 239; 1,4142. **4.** 2,44 y 2,45.

5. $\frac{11}{90}$, $\frac{2}{15}$. **6.** 2,65; 3,16; 4,12.

Capítulo 2

Ejercicio 2.1

1. *a*) $-4i$ (imaginario); *b*) -1 (real); *c*) $-128i$ (imaginario); *d*) $-6i$ (imaginario); *e*) 1/2 (real).

3. *a*) $6i$; *b*) $2i$; *c*) $-12i$; *d*) $-4i$; *e*) $8i$; *g*) 6.

4. $\pm 3/2$; $\pm 7i/2$.

Ejercicio 2.2

1. Imaginario; real; imaginario; real; $a + ib$; $a + ib$; imaginario; $a + ib$; real; imaginario.

2. i; -1; $-4i$; -3; $4 - 5i$; $7 + 3i$; $-5i$; $2 - 2i$; 2; i.

3. *a*) $17 + 8i$; *b*) 5; *c*) $-5 - 10i$.

4. *a*) $3 + 4i$; *b*) $10 - 5i$; *c*) $1/5(2 - 11i)$; *d*) $-i$.

5. *a*) $1/10(7 + 9i)$; *b*) $1 + i$. **6.** 13.

Ejercicio 2.3

2. *a*) $(5, -5)$; *b*) $(2, 0)$; *c*) $(-2, 1)$; *d*) $(-1, 0)$; *e*) $(2ab, b^2 - a^2)$; *f*) $(0, a^2 + b^2)$; *g*) $(y, -x)$; *h*) $(14, 22)$; *i*) $(1/10, -4/5)$; *j*) $(-2/13, -3/13)$.

3. $2\sqrt{26} - 6\sqrt{2} \simeq 1{,}71$.

Capítulo 3

Ejercicio 3.1

1. *a*) $(5, 5\sqrt{3})$; *b*) $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$; *c*) $(3, 0)$; *d*) $(0, 5)$; *e*) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$; *f*) $(-1, \sqrt{3})$; *g*) $(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$.

2. *a*) $(5, 53°)$; *b*) $(5, 307°)$; *c*) $(5, 127°)$; *d*) $(5, 233°)$ [con el ángulo entero más próximo].

3. *a*) $(-2, 2)$; *b*) $(2\sqrt{2}, 135°)$.

4. *a*) $\sqrt{17} + \sqrt{10} - \sqrt{29} \simeq 1{,}90$; *b*) $(4{,}12,\ 76°)$, $(5{,}39,\ 112°)$; *c*) $36°$.

5. 3,61; 106°.

Ejercicio 3.2

1. *a*) $(-2, 5)$; *b*) $(5, 1)$; *c*) $(0, 9)$; *d*) $(-1, 0)$; *e*) $(-2, -12)$; *f*) $(0, 6)$.

3. $(5, 37°)$. **4.** $2\sqrt{2} \simeq 2{,}83$; 315. **5.** $\mathbf{p} + \mathbf{q}$. **6.** $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

7. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$; $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. **8.** $-\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}$.

9. $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$; $2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d}$. **10.** $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Ejercicio 3.3

1. *a*) 90 nudos; *b*) 150 nudos; *c*) 3 horas 44 minutos.

2. 117 nudos; S 23° E. **3.** S 25° O. **4.** N 34° E; 28,8.

5. Viaje de ida: S 54° O, 184 km/h, 65 min;
viaje de vuelta: N 35° E, 128 km/h, 94 min.

Ejercicio 3.4

1. $\mathbf{a} + k\mathbf{r}$. **2.** $\mathbf{b} - \mathbf{a}$; $(1 - k)\mathbf{a} + k\mathbf{b}$.

Capítulo 4

Ejercicio 4.1

1. *a*) 123; *b*) 125; *c*) 0. **2.** *a*) 2.152; *b*) 30.343; *c*) 1.005.143.

3. *a*) 131; *b*) 23; *c*) 125. **4.** *a*) 718; *b*) 2.739; *c*) 7.777.

5. *a*) 10.503; *b*) 114.433; *c*) 1.330.154. **7.** *a*) 9; *b*) 8.

Ejercicio 4.2

1. *a*) 1100; *b*) 10111; *c*) 1001000; *d*) 10111111;
e) 1000100011; *f*) 101111101110; *g*) 100101100001.

2. *a*) 7; *b*) 10; *c*) 15; *d*) 26; *e*) 45; *f*) 183; *g*) 228; *h*) 741.

3. *a*) 1100; *b*) 11000; *c*) 10100; *d*) 1011101; *e*) 101111;
f) 110010100. **4.** 1100. **5.** *a*) 111; *b*) 11; *c*) 0; *d*) 1110.

Ejercicio 4.3

1. *a*) 100011; *b*) 100001; *c*) 1001110; *d*) 100011110;
e) 1101001; *f*) 10011011010.

2. *a*) 110; *b*) 111; *c*) 10101. **3.** *a*) 11; *b*) 101; *c*) 11.

4. $x = 10$; $y = 1$. **5.** *a*) 43; *b*) 918; *c*) 27805.

6. *a*) 1011000; *b*) 110; *c*) 10111. **7.** *a*) 100011; *b*) 110110.

8. *a*) 110; *b*) 10011; *c*) 100101. **9.** 10011.

Ejercicio 4.4

1. *a*) $\frac{3}{4}$, 0,75; *b*) $\frac{5}{16}$, 0,3125; *c*) $\frac{19}{32}$, 0,59375; *d*) $5\frac{1}{4}$, 5,25;
   e) $6\frac{13}{16}$, 6,8125; *f*) $\frac{1}{2}$, 0,5. [*Nota:* $0{,}0\dot{1}_2 = 0{,}1_2 = \frac{1}{2}$.];
   g) $9\frac{2}{3}$; $9{,}\dot{6}$. [*Nota:* $0{,}\dot{1}\dot{0}_2 = \frac{10}{11}$ (base dos) $= \frac{2}{3}$ (base diez).];
   h) $\frac{1}{6}$, $0{,}1\dot{6}$; *i*) $\frac{3}{7}$, $0{,}\dot{4}2857\dot{1}$; *j*) $\frac{3}{5}$, 0,6.

Ejercicio 4.5

1. *a*) 0,011; *b*) 0,1011; *c*) $0{,}\dot{0}1\dot{0}$; *d*) $0{,}\dot{1}000\dot{1}$;
   e) $0{,}\dot{1}11\dot{0}$; *f*) $0{,}10\dot{0}\dot{1}$.
2. *a*) 0,101; *b*) 0,0111; *c*) 0,00101; *d*) 0,001011.
3. *a*) $0{,}\dot{1}10\dot{0}$; *b*) $0{,}\dot{1}00\dot{1}$; *c*) $0{,}1\dot{1}10\dot{0}$; *d*) $0{,}11\dot{0}11\dot{0}$; *e*) $0{,}\dot{1}\dot{0}$;
   f) $0{,}\dot{1}1100\dot{0}$; *g*) $0{,}\dot{1}10\dot{0}$; [La forma decimal es 14/15, que es la misma de la cuestión 1.*e*).]

Ejercicio 4.6

1. *a*) 117; *b*) 224; *c*) 734; *d*) 7.516; *e*) 24.745; *f*) 60.552; *g*) 234.064.
2. *a*) 100110; *b*) 111100; *c*) 100010011; *d*) 101111110;
   e) 11000100000; *f*) 110111011010; *g*) 10000111010011.
3. *a*) 11011010; *b*) 10100011101; *c*) 101011100110;
   d) 1001001001011; *e*) 1111110110101; *f*) 10000100110000.
4. *a*) 281; *b*) 164; *c*) 45; *d*) 599; *e*) 5.261; *f*) 2.566.
5. *a*) 355; *b*) 21.330; *c*) 2.576; *d*) 1.200.1000.
6. *a*) 534; *b*) 1.522; *c*) 4.612; *d*) 6; *e*) 7; *f*) 71.
7. *a*) 453; *b*) 1.002; *c*) 2.101.
8. *a*) 0,5625; *b*) $0{,}\dot{6}$; *c*) $0{,}\dot{3}$; *d*) $0{,}\dot{4}$; *e*) 0,423077; *f*) 0,6875; *g*) 0,7.

Capítulo 5

Ejercicio 5.1

4. *a*) 3; *b*) 15; *c*) 4; *d*) 2; *e*) 0; *f*) 3; *g*) 3; *h*) 4; *i*) 0; *j*) 3.

Ejercicio 5.2

1. $4n + 1$ (o podría ser $4n - 3$ o cualquier otra forma adecuada, pero son fundamentalmente las mismas). **2.** $7n + 3$.

3. $8n + 2$. **4.** $5n + 2$. **5.** 23, 40, 57. **7.** Sí: $5n + 4$.

Ejercicio 5.3

1. *a*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60; *b*) 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84; *c*) 1, 5, 7, 11, 35, 55, 77, 385.
2. *a*) 2, 3, 5, 13; *b*) 11, 13, 17; *c*) 3, 7, 13, 137.
3. *a*) No; *b*) Sí; *c*) No; *d*) No.
4. *a*) div 11; *b*) div 13; *c*) Ninguno.

5. 3, 5, 7, 15; **6.** 3, 7, 13.

Capítulo 6

Ejercicio 6.1

1. *a*) Sí; *b*) Sí; *c*) No; *d*) No; *e*) Sí. **2.** Sí, sí, no, sí, no.

3. *a*) Sí; *b*) No. **4.** ϕ, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, $\{1,7\}$, $\{3,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,7\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,3,7\}$, $\{1,5,7\}$, $\{3,5,7\}$, $\{1,3,5,7\}$; 16 subconjuntos. **5.** $\{1,2,3,5,7,11,13\}$; 128.

6. *a*) Sí; *b*) Sí; *c*) Sí; *d*) No. **7.** Sí. **8.** 47; 257.

9. 256.

Ejercicio 6.2

2. *a*) Dama de rombos; *b*) ϕ, {Q♦}, {Q♥}, {Q♦, Q♥}.

3. *a*) Sí; *b*) Sí. **5.** *a*) Sí; *b*) No; *c*) Sí; *d*) Sí; *e*) No; *f*) Sí; reescribiendo: $A = \{\text{Cuadrados}\}$, etc.

6. Falacia; el polígono puede tener más de cuatro ángulos.

8. $E = \{\text{Ovíparos}\}$.

Ejercicio 6.3

1. $\{3,7,10\}$, $\{1,3,7\}$, $\{2,3,7\}$. **2.** $\{3,7\}$.

3. *a*) 2, 5, 7, 8; *b*) 1, 3, 5, 7; *c*) 4; *d*) 4; *d*) 4. **4.** Sí.

5. {Cuadrados}.
6. Ésta es una cuestión con truco: Sidney puede ser un chico o una chica, pero con este nombre es más probable que sea lo último; *ergo*, no sabemos si la bicicleta puede ser montada.
7. El circuncentro, esto es, el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC.

Ejercicio 6.4

2. ϕ. **5.** $\{1, 6, 9\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. **9.** A.

10. *a*) Verdad; *b*) Falso; *c*) Falso.

Capítulo 7

Ejercicio 7.1

Las cuestiones 1*a*, 2*a* y 3*a* son fundamentalmente las mismas que 1*b*, 2*b* y 3*b*, respectivamente, pero se escriben de una forma ligeramente distinta. Las respuestas se dan, por tanto, en la correspondiente notación.

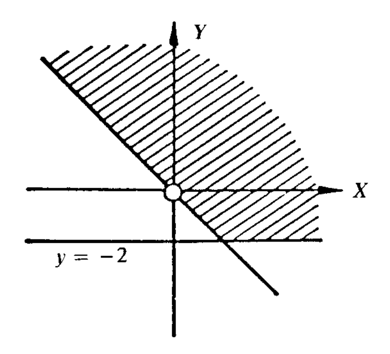
1. *a*) $x > 8$; *b*) $S = \{x : x > 8\}$.
2. *a*) $x > 4/5$; *b*) $S = \{x : x > 4/5\}$.
3. *a*) $x \geqslant -1/5$; *b*) $S = \{x : x \geqslant -1/5\}$. **4.** $-3/2 < x < 3/2$.
5. $-2 \leqslant x \leqslant 4$.
7. $-4 \leqslant x < -2\frac{1}{2}$ y $3 < x \leqslant 4$;

$$S = \left\{x : -4 \leqslant x < -2\frac{1}{2}\right\} \cup \{x : 3 < x \leqslant 4\}.$$

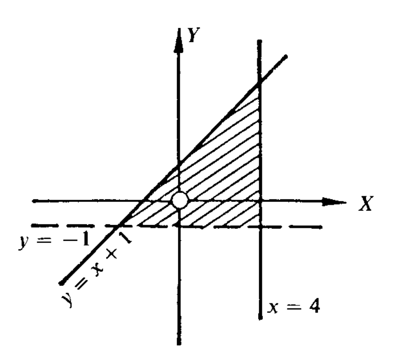
Ejercicio 7.2

1. La parte del plano x, y sobre la línea $y = x + 2$, incluyendo la misma recta.
2. La parte del plano x, y a la izquierda de la recta $y = -2x$, sin incluir la recta.

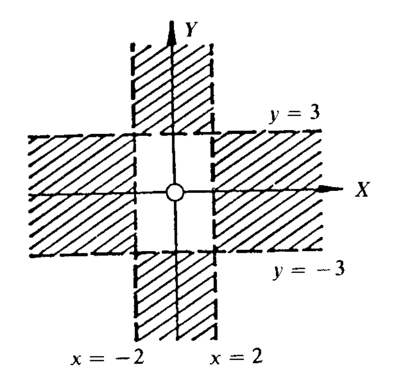
3. La parte del plano x, y sobre la línea $y > -5/4$, sin incluir la recta.



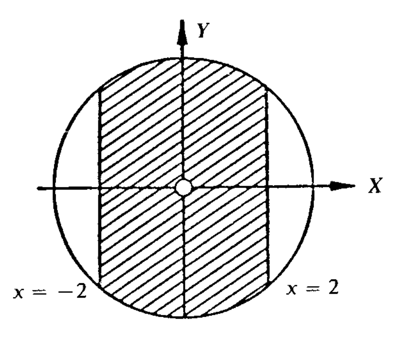
4. El área rayada.



5. El área rayada.



6. El área rayada.



7. El área rayada.

Ejercicio 7.3

1. $(1, -2)$, $(1, 2)$, $(2, -2)$, $(2, 2)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$.

2. $(0, 0)$, $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(-2, 2)$, $(-1, 2)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$. **3.** $(1, 1)$, $(2, 0)$.

Capítulo 8

Ejercicio 8.1

1. *a*) $y = -2x + 3$; *b*) $y = 2/3x + 2$; *c*) $y = -2x - 5/2$; *d*) $y = 2/3x - 4/3$; *e*) y *c*) son paralelas (pendiente -2); *b*) y *d*) son paralelas (pendiente 2/3); por tanto, los puntos de intersección de las cuatro líneas forman un paralelogramo.

2. Las líneas cortan en el origen y son perpendiculares. [*Nota:* Ya se ha indicado que dos líneas $y = m_1 x$ e $y = m_2 x$ son perpendiculares si $m_1 m_2 = -1$, ya que esto es lo mismo que decir que m_1 y m_2 pueden ser expresadas, respectivamente, como a/b y $-b/a$. El resultado es verdad para las rectas $y = m_1 x + c_1$ e $y = m_2 x + c_2$, ya que las ordenadas c_1 y c_2 son solamente los cortes con el eje OY y no afectan a las pendientes.]

Ejercicio 8.2

1. Los puntos más prometedores del cuadrilátero son (12, 19) y (13, 18); considerando éstos financieramente, bien por el método gráfico, o bien por cálculos, encontramos que (13, 18) es mejor y nos da 137 dinares (aunque el número de jarrones es el mismo en cada caso, ya que $12 + 19 = 13 + 18$, la primera coordenada se refiere a los jarrones de cinco dinares y la segunda a los de cuatro).

2. Las cantidades de F., L. y N. En 1 kg de Charmin son, respectivamente, 3/10, 2/10, 5/10 kg. De igual modo, en Teasham, son, respectivamente, 4/11, 5/11 y 2/11. Si x, y son los números de bolsas de Charmin y Teasham, por ese orden, tendremos:

$$S = \left\{(x, y) : \frac{3}{10}x + \frac{4}{11}y \leqslant 18;\ \frac{2}{10}x + \frac{5}{11}y \leqslant 20;\ \frac{5}{10}x + \frac{2}{11}y \leqslant 15;\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0\right\}$$

Este conjunto nos da un pentágono dentro del cual buscamos los mejores puntos, (17, 35), dando los ingresos pedidos 86,60 libras.

3. Sea x el número de billetes de segunda clase vendidos e y el número de los de primera. Entonces:

$$S = \left\{(x, y) : x + y \leqslant 200;\ y \leqslant \frac{x}{3} + 40;\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0\right\}$$

El mejor punto del cuadrilátero es (120, 80), esto es, el mayor número de pasajeros de primera clase es 80. Los máximos ingresos son 13.680 M.

Los números de pasajeros de 1.ª y 2.ª clase que se necesitan son, ambos, 60. El beneficio es de 8.640 M.

Capítulo 9

Ejercicio 9.1

1. *a*) A; *b*) A. **5.** *a*) $A \cap (B \cup C)$; *b*) $A \cup (B \cap C)$.

Ejercicio 9.2

1. *a*) 7; $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 18.480$; *b*) 6; 17.136.

2. *a*) z; $x^3y^3z^2$; *b*) $2c$; $240a^3b^2c^2$.

3. $2(a - b)$; $12ab(a - b)$. **4.** 256; 1.536.

Ejercicio 9.3

3. *a*) $\{2, 4, 6, 8\}$; *b*) $\{1, 5, 8\}$; *c*) $\{8\}$; *d*) $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$; *e*) $\{1, 5\}$; *f*) $\{8\}$; *g*) $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$.

6. $\{a, b, e, f\}$, que es, por supuesto, C. **7.** 18 que sólo van al fútbol. **8.** 22; 3; 53.

Ejercicio 9.4

1. $A + B$. **2.** A'. **3.** 0. **4.** 1. **5.** B.

6. A. **7.** A. **8.** $A + B$. **9.** $B + AC$. **10.** 0.

11. $AB + AC$. **12.** $A'B$. **13.** $A'B' + AB$.

14. $A + BC$.

15. Pág. 153; $A'B' = (A + B)'$.

Ejercicio 9.5

2. $\{1, 2, 5, 6\}$.

Capítulo 10

Ejercicio 10.1

1. Sí. **2.** Sí.

3. Dudoso: dependerá de si todos los espectadores se vuelven perezosos.

4. No: será de sentido común, pero no es lógico.

5. Estrictamente, la conclusión debe ser «algunos números son múltiplos de 12», ya que 2 está incluido en 4.

6. No. La única conclusión lógica sería que cada ejecutivo tiene un chófer que se lleva su coche.

7. No. Es un juego de palabras.

8. Algunos chicos gastan su dinero en cigarrillos.

9. Algunas mujeres no pueden costearse la compra de nuevos sombreros.

10. N es un múltiplo de 42.

11. No hay solución porque las palabras subir y bajar se usan en diferentes sentidos al mismo tiempo.

Ejercicio 10.2

7. La proposición no es verdad.

Ejercicio 10.3

3. $(a_N a)_N (b_N b)$. **4.** $(a_N b)_N (a_N b)$.

5. $(a_N a)_N (b_N c)$. **6.** $[(a_N a)_N (b_N b)]_N [(a_N a)_N (b_N b)]$.

7. $[a_N\{(b_N b)_N (c_N c)\}]_N [a_N\{(b_N b)_N (c_N c)\}]$. **8.** $(a_N a)_N (a_N a)$.

Capítulo 11

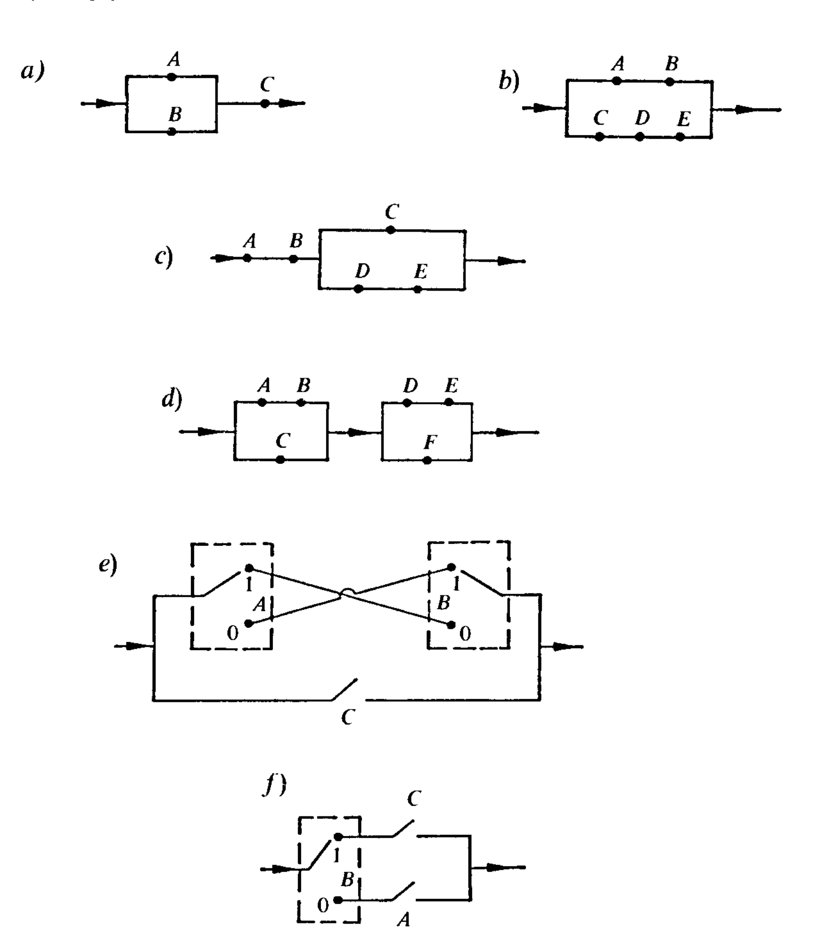
Ejercicio 11.1

1. $ab + cd$. **2.** $a + b + c$. **3.** $[(a + b)c + d]e$.

4. $(a + c)b + (e + f)d$. **5.** No; sí; sí; no.

6. No; sí; no; sí.

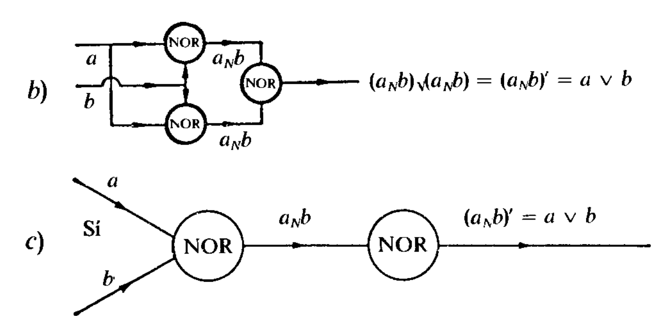
En las cuestiones *a*) a *d*), *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* son interruptores sencillos.



Ejercicipo 11.2

2. 31 no puede ser obtenido, ya que se necesitarían, respectivamente, las entradas de 15 y 16; el número 15 es 1111 (cuatro dígitos), pero 16 es 10000 (cinco dígitos), que no es posible en el aparato mostrado.

3. *a*) Fig. 11.26.



Capítulo 12

Ejercicio 12.1

1. Los ejemplos se dan solamente para indicar la forma de las matrices.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; *b*) $[2 \quad 4 \quad -1]$; *c*) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ -a & d & 0 \\ e & b & f \end{bmatrix}$; *e*) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$; *f*) $\begin{bmatrix} p & q \\ -p & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Cinco filas, tres columnas.

3. *a*) Sí; *b*) no; *c*) sí; *d*) no; *e*) sí; *f*) sí; *g*) sí.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; *c*) $[0 \quad 2 \quad -5]$; *e*) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

f) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; *g*) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -8 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

4. *a*) $x = -2$; *b*) $x = 2/3$, $y = \pm 2i$; *c*) $x = -1$, $y = 0$; *d*) $x = -2$, $y = 3$; *e*) $x = 3$ ó 4.

5. $x = \pm 3/2$; y no puede ser determinada.

Ejercicio 12.2

1. $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & -20 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$; **2.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -16 \\ -8 & -4 & 12 \\ 8 & -20 & 0 \end{bmatrix}$; **4.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **5.** $x = -1/3$; $y = 2$.

6. *a*) $17\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$; *b*) $7\begin{bmatrix} 13 & 9 & -8 \\ 7 & 0 & -14 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 12.3

1. *a*) sí; *b*) sí; *c*) sí; *d*) sí; *e*) no; *f*) sí; *g*) sí; *h*) sí; *i*) sí.

a) $[-15]$; *b*) $[-4]$; *c*) $[6 \quad 13]$; *d*) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; *f*) $[11]$,

g) $\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 0 & 0 \\ -15 & -12 \end{bmatrix}$; *h*) $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$; *i*) $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 14 & 19 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

2. $\mathbf{AB} = (8)$, $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

3. $\mathbf{PQ} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$; **QP** sin sentido. **4.** $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 41 \\ -1 & -3 & 6 \\ 19 & 11 & -7 \end{bmatrix}$.

5. $x = 12$, $y = -10$. **6.** $\begin{bmatrix} 0 & 12 & 2 \\ 1 & 19 & 0 \end{bmatrix}$.

7. $a_{32} = 11$, $a_{21} = -2$.

Ejercicio 12.4

1. $x = 2,\ y = 0.$ **2.** $m = 2/3,\ n = -3/2.$

3. $x = -3/5,\ y = 13/10.$

Ejercicio 12.5

1. $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \phi.$ **2.** $\mathbf{A}^2 - 2a\mathbf{A} + (a^2 + b^2)\mathbf{I} = \phi.$

3. $\mathbf{A}^2 + 7\mathbf{I} = \phi.$ **4.** $\mathbf{A}^2 - 2(c + d)\mathbf{A} = \phi.$

5. **P**, no; **Q**, sí; Δ (para **Q**) $= -8$.

6. $\begin{bmatrix} a^3 + 2a^2b - ab^2 & a^3 + ab^2 \\ a^2b + b^3 & a^2b - 2ab^2 - b^3 \end{bmatrix}.$ **7.** $49\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$

8. *a*) $\mathbf{X} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 13 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{13}{5},\ y = \frac{1}{5};$

b) $x = \frac{2c}{2a - b},\ y = \frac{-c}{2a - b}.$

Ejercicio 12.6

1. 73 por 100 en contra, 27 por 100 a favor; en la nueva situación: 74,7 por 100 en contra, 25,3 por 100 a favor.

2. 12,25 por 100 a favor, 5 por 100 indecisos, 82,75 por 100 en contra.

3. 35,51 por 100 a favor de Shrinko, 37,87 por 100 a favor de Rottaway, 28,62 por 100 a favor de Skratch.

Capítulo 13

1. 1/2 (los primeros resultados no sirven en este caso).

2. 1/3 (teórica). **3.** Probabilidad de que Smith saque un número primo 2/3; probabilidad de que Jones saque un número primo 5/8; por tanto, Smith debería ganar.

4. *a*) 3/26; *b*) 5/13; **5.** *a*) 11/50; *b*) 3/50; *c*) 12/25.

6. 3/4, 3:1; *a*) 8; *b*) 5 (éste es el peor resultado, ya que de las cuatro primeras tiradas la más desfavorable es 2B, 2R y entonces la próxima debe ser B o R).

Ejercicio 13.2

1. *a*) 1/6; *b*) 5/36. **2.** 67 : 5; 1/36.
3. 5/6. **4.** 5 : 3. **5.** 9 : 2.

Ejercicio 13.3

1. 25/36; 11/36; **2.** 1/9. **3.** John; 125:91.

Ejercicio 13.4

1. *a*) 1/1.326; *b*) 1/17. **2.** 1/22.100. **3.** 4/7.

5. 2/9. **6.** 3/8. **7.** 50:49.

8. 32/63. **9.** $p_1(1 - p_2):(p_1 + p_2 - 2p_1p_2)$.

Ejercicio 13.5

1. 5/16; sí. **2.** *a*) 0,262; *b*) 0,246. **3.** 6.560:1.

4. $1 - (35/36)^{24} \simeq 0{,}490$ (utilizando tablas logarítmicas, apuesta perdedora).

6. *a*) $C_{4,2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$;

b) $C_{4,2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + C_{4,3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right) + C_{4,4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{19}{144}$.

7. $\frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{11} \times \frac{5}{6} = \frac{6}{11}$.

Ejercicio 13.6

1. $\frac{3}{640}$. **2.** $\frac{5}{54}$. **3.** $\frac{1}{126}$.

Matemática moderna



Este libro está escrito para aquellos que deseen comprender algo de los fundamentos y propósitos de las matemáticas modernas.
L.C. Pascoe introduce clara y lógicamente cada uno de los aspectos de las crecientemente importantes modernas —o nuevas— matemáticas. Para su estudio tan sólo se precisa una familiaridad básica con los procesos de aritmética y matemáticas elementales. Se incluyen muchos ejemplos desarrollados, así como series cuidadosamente graduales de ejercicios, con soluciones al final del libro.

PIRÁMIDE




JAR'23






JAR'23




JAR'23


JAR'23


JAR'23


JAR'23